ГЕОМЕТРИЯ

Программы
общеобразовательных
учреждений

10 – 11 КЛАССЫ

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 372.8:514
ББК 74.26
Г36

Составитель Т. А. Бурмистрова

ISBN 978-5-09-023625-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемые программы (примерная и авторские) по геометрии составлены в соответствии с требованиями федерального компонента Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике. Они позволяют получить представление о целях и содержании обучения геометрии в 10—11 классах, в рамках обучения по учебникам, выпускаемым издательством «Просвещение». Авторские программы составлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми как к базовому, так и к профильному уровню обучения. При этом авторами программ и учебников предлагаются различные структуры учебного материала, которые определяют последовательность изучения материала в рамках стандарта для старшей школы и пути формирования системы знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования, а также развития учащихся.

Каждая авторская программа включает в себя содержание обучения, примерное планирование учебного материала в зависимости от отводимого учебного времени, требования к уровню подготовки учащихся, контрольные работы.

Планирование учебного материала по геометрии рассчитано на 1,5 (базовый уровень), 2 (профильный уровень) и 3 (углубленное изучение) часа в неделю в течение года для каждого класса. Это позволяет учителю в зависимости от количества часов выбрать любой из вариантов тематического планирования. Уменьшение часов в рамках существующего стандарта отрицательно сказывается не только на математическом, но и на общем развитии учащихся.

Начиная с 2006 года издательство «Просвещение» выпускает доработанные двухуровневые учебники геометрии для базового и профильного уровня, соответствующие требованиям федерального компонента Государственного образовательного стандарта по математике:

А. Д. Александров и др. «Геометрия, 10» и «Геометрия, 11» для профильного уровня и углубленного изучения;

А. Д. Александров и др. «Геометрия, 10—11» для базового и профильного уровней;

Л. С. Атанасян и др. «Геометрия, 10—11» для базового и профильного уровней;

А. В. Погорелов «Геометрия, 10—11» для базового и профильного уровней.

Федеральный компонент Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике (геометрия)

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Изучение математики на базовом уровне среднего (полного) общего образования направлено на достижение следующих целей:

- **формирование** представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- **развитие** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, а также последующего обучения в высшей школе;
- **овладение** математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественно-научных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- **воспитание** средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Обязательный минимум содержания основных образовательных программ[1]

ГЕОМЕТРИЯ

Прямые и плоскости в пространстве

- Основные понятия стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство).

[1] Курсивом в тексте выделен материал, который подлежит изучению, но не включается в Требования к уровню подготовки выпускников.

- Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых. Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства. Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.
- Параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства. *Двугранный угол, линейный угол двугранного угла.*
- Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. *Расстояние между скрещивающимися прямыми.*
- Параллельное проектирование. *Площадь ортогональной проекции многоугольника.* Изображение пространственных фигур.

Многогранники

- Вершины, ребра, грани многогранника. *Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.*
- Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Прямая и *наклонная* призмы. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.
- Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Треугольная пирамида. Правильная пирамида. *Усеченная пирамида.*
- Симметрии в кубе, в параллелепипеде, *в призме и пирамиде. Понятие о симметрии в пространстве (центральная, осевая, зеркальная). Примеры симметрий в окружающем мире.*
- Сечения куба, призмы, пирамиды.
- Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Тела и поверхности вращения

- Цилиндр и конус. *Усеченный конус.* Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. *Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.*
- Шар и сфера, их сечения, *касательная плоскость к сфере.*

Объемы тел и площади их поверхностей

- *Понятие об объеме тела. Отношение объемов подобных тел.*

- Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Координаты и векторы

- Декартовы координаты в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы и *плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.*
- Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам.

Требования к уровню подготовки выпускников

В результате изучения математики на базовом уровне ученик должен

знать/понимать[1]:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

ГЕОМЕТРИЯ

Уметь:

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;

[1] Помимо указанных в данном разделе знаний, в требования к уровню подготовки включаются также знания, необходимые для освоения перечисленных ниже умений.

- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, *аргументировать свои суждения об этом расположении*;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела, выполнять чертежи по условиям задач;
- *строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды*;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
- вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Изучение математики на профильном уровне среднего (полного) общего образования направлено на достижение следующих целей:

формирование представлений об идеях и методах математики; о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов;

- **овладение** языком математики в устной и письменной форме, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественно-научных дисциплин, продолжения образования и освоения избранной специальности на современном уровне;
- **развитие** логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способно-

стей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности;

- **воспитание** средствами математики культуры личности через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; понимания значимости математики для научно-технического прогресса.

Обязательный минимум содержания основных образовательных программ[1]

ГЕОМЕТРИЯ

Геометрия на плоскости

- Свойство биссектрисы угла треугольника. Решение треугольников. Вычисление биссектрис, медиан, высот, радиусов вписанной и описанной окружностей. Формулы площади треугольника: формула Герона, выражение площади треугольника через радиус вписанной и описанной окружностей.
- Вычисление углов с вершиной внутри и вне круга, угла между хордой и касательной.
- Теорема о произведении отрезков хорд. Теорема о касательной и секущей. Теорема о сумме квадратов сторон и диагоналей параллелограмма.
- Вписанные и описанные многоугольники. Свойства и признаки вписанных и описанных четырехугольников.
- Геометрические места точек.
- Решение задач с помощью геометрических преобразований и геометрических мест.
- *Теорема Чевы и теорема Менелая.*
- *Эллипс, гипербола, парабола как геометрические места точек.*
- *Неразрешимость классических задач на построение.*

Прямые и плоскости в пространстве

- Основные понятия стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство). *Понятие об аксиоматическом способе построения геометрии.*

[1] Курсивом в тексте выделен материал, который подлежит изучению, но не включается в Требования к уровню подготовки выпускников.

- Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых. Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства. Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
- Параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла.
- Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
- Параллельное проектирование. Ортогональное проектирование. *Площадь ортогональной проекции многоугольника.* Изображение пространственных фигур. *Центральное проектирование.*

Многогранники

- Вершины, ребра, грани многогранника. *Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.*
- Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Прямая и наклонная призмы. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.
- Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Треугольная пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.
- Симметрии в кубе, в параллелепипеде, *в призме и пирамиде.*
- *Понятие о симметрии в пространстве (центральная, осевая, зеркальная).*
- Сечения многогранников. Построение сечений.
- Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Тела и поверхности вращения

- Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. *Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.*
- Шар и сфера, их сечения. *Эллипс, гипербола, парабола как сечения конуса.* Касательная плоскость к сфере. *Сфера, вписанная в многогранник; сфера, описанная около многогранника.*
- *Цилиндрические и конические поверхности.*

Объемы тел и площади их поверхностей

- *Понятие об объеме тела. Отношение объемов подобных тел.*
- Формулы объема куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Координаты и векторы

- Декартовы координаты в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы и *плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.*
- Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам.

Требования к уровню подготовки выпускников

В результате изучения математики на профильном уровне ученик должен

знать/понимать[1]:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки;
- идеи расширения числовых множеств как способа построения нового математического аппарата для решения практических задач и внутренних задач математики;
- значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций;
- возможности геометрии для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;

---

[1] Помимо указанных в данном разделе знаний, в требования к уровню подготовки включаются также знания, необходимые для освоения перечисленных ниже умений.

- различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;
- роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знания и для практики;
- вероятностный характер различных процессов и закономерностей окружающего мира.

ГЕОМЕТРИЯ

Уметь:

- соотносить плоские геометрические фигуры и трехмерные объекты с их описаниями, чертежами, изображениями; различать и анализировать взаимное расположение фигур;
- изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи;
- решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;
- проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса;
- вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, объемы и площади поверхностей пространственных тел и их простейших комбинаций;
- применять координатно-векторный метод для вычисления отношений, расстояний и углов;
- строить сечения многогранников и изображать сечения тел вращения.

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
- вычисления длин, площадей и объемов реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

Примерная программа среднего (полного) общего образования по математике (геометрия)

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Пояснительная записка

Статус документа

Примерная программа по математике составлена на основе федерального компонента Государственного стандарта среднего (полного) общего образования на базовом уровне.

Примерная программа конкретизирует содержание предметных тем образовательного стандарта и дает примерное распределение учебных часов по разделам курса.

Примерная программа выполняет две основные функции.

Информационно-методическая функция позволяет всем участникам образовательного процесса получить представление о целях, содержании, общей стратегии обучения, воспитания и развития учащихся средствами данного учебного предмета.

Организационно-планирующая функция предусматривает выделение этапов обучения, структурирование учебного материала, определение его количественных и качественных характеристик на каждом из этапов, в том числе для содержательного наполнения промежуточной аттестации учащихся.

Примерная программа является ориентиром для составления авторских учебных программ и учебников. Она определяет инвариантную (обязательную) часть учебного курса, за пределами которого остается возможность авторского выбора вариативной составляющей содержания образования. При этом авторы учебных программ и учебников могут предложить собственный подход в части структурирования учебного материала, определения последовательности изучения этого материала, а также путей формирования системы знаний, умений и способов деятельности, развития и социализации учащихся. Тем самым примерная программа содействует сохранению единого образовательного пространства, не сковывая творческой инициативы учителей и авторов учебников, и предоставляет широкие возможности для реализации различных подходов к построению учебного курса.

Структура документа

Примерная программа включает три раздела: ***пояснительную записку***; ***основное содержание*** с примерным распределением учебных часов по разделам курса; ***требования*** к уровню подготовки выпускников.

Общая характеристика учебного предмета

При изучении курса математики на базовом уровне продолжаются и получают развитие содержательные линии: «Алгебра», «Функции», «Уравнения и неравенства», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, теории вероятностей, статистики и логики», вводится линия «Начала математического анализа». В рамках указанных содержательных линий решаются следующие задачи:

систематизация сведений о числах; изучение новых видов числовых выражений и формул; совершенствование практических навыков и вычислительной культуры, расширение и совершенствование алгебраического аппарата, сформированного в основной школе, и его применение к решению математических и нематематических задач;

расширение и систематизация общих сведений о функциях, пополнение класса изучаемых функций, иллюстрация широты применения функций для описания и изучения реальных зависимостей;

изучение свойств пространственных тел, формирование умения применять полученные знания для решения практических задач;

развитие представлений о вероятностно-статистических закономерностях в окружающем мире, совершенствование интеллектуальных и речевых умений путем обогащения математического языка, развития логического мышления;

знакомство с основными идеями и методами математического анализа.

Цели

Изучение математики в старшей школе на базовом уровне направлено на достижение следующих целей:

- ***формирование*** представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

- ***развитие*** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;
- ***овладение*** математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественно-научных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- ***воспитание*** средствами математики культуры личности, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; понимания значимости математики для общественного прогресса.

Место предмета в базисном учебном плане

Согласно Федеральному базисному учебному плану для образовательных учреждений Российской Федерации для обязательного изучения математики на этапе среднего (полного) общего образования отводится не менее 280 ч из расчета 4 ч в неделю. При этом предполагается построение курса в форме последовательности тематических блоков с чередованием материала по алгебре, анализу, дискретной математике, геометрии.

Примерная программа рассчитана на 280 учебных часов. При этом в ней предусмотрен резерв свободного учебного времени в объеме 30 учебных часов для реализации авторских подходов, использования разнообразных форм организации учебного процесса, внедрения современных методов обучения и педагогических технологий.

Общеучебные умения, навыки и способы деятельности

В ходе освоения содержания математического образования учащиеся овладевают разнообразными способами деятельности, приобретают и совершенствуют опыт:

построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач, задач из смежных дисциплин;

выполнения и самостоятельного составления алгоритмических предписаний и инструкций на математическом материале;

выполнения расчетов практического характера;

использования математических формул и самостоятельного составления формул на основе обобщения частных случаев и эксперимента;

самостоятельной работы с источниками информации, обобщения и систематизации полученной информации, интегрирования ее в личный опыт;

проведения доказательных рассуждений, логического обоснования выводов, различения доказанных и недоказанных утверждений, аргументированных и эмоционально убедительных суждений;

самостоятельной и коллективной деятельности, включения своих результатов в результаты работы группы, соотнесения своего мнения с мнением других участников учебного коллектива и мнением авторитетных источников.

Результаты обучения

Результаты обучения представлены в Требованиях к уровню подготовки и задают систему итоговых результатов обучения, которых должны достигать все учащиеся, оканчивающие среднюю школу, и достижение которых является обязательным условием положительной аттестации ученика за курс средней школы. Эти требования структурированы по трем компонентам: «знать/понимать», «уметь», «использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни». При этом последние два компонента представлены отдельно по каждому из разделов содержания.

Очерченные стандартом рамки содержания и требований ориентированы на развитие учащихся и не должны препятствовать достижению более высоких уровней.

Основное содержание

ГЕОМЕТРИЯ
(100 ч)

Прямые и плоскости в пространстве. Основные понятия стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство).

Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые.

Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых.

Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства. Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.

Параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла.

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Параллельное проектирование. Площадь ортогональной проекции многоугольника. Изображение пространственных фигур.

Многогранники. Вершины, ребра, грани многогранника. Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.

Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Прямая и наклонная призмы. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.

Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Треугольная пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.

Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде.

Понятие о симметрии в пространстве (центральная, осевая, зеркальная). Примеры симметрий в окружающем мире.

Сечения куба, призмы, пирамиды.

Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Тела и поверхности вращения. Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.

Шар и сфера, их сечения, касательная плоскость к сфере.

Объемы тел и площади их поверхностей. Понятие об объеме тела. Отношение объемов подобных тел.

Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Координаты и векторы. Декартовы координаты в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы и плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.

Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам.

Требования к уровню подготовки выпускников

В результате изучения математики на базовом уровне ученик должен

знать/понимать[1]**:**

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

ГЕОМЕТРИЯ

Уметь:

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела, выполнять чертежи по условиям задач;
- строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

[1] Помимо указанных в данном разделе знаний, в требования к уровню подготовки включаются также знания, необходимые для освоения перечисленных ниже умений.

- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
- вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Пояснительная записка

Статус документа

Примерная программа по математике составлена на основе федерального компонента Государственного стандарта среднего (полного) общего образования на профильном уровне. Примерная программа конкретизирует содержание предметных тем образовательного стандарта и дает примерное распределение учебных часов по разделам курса.

Материал, который в Обязательном минимуме содержания основных образовательных стандартов выделен курсивом, т. е. подлежит изучению, но не включается в требования к уровню подготовки выпускников, введен в основное содержание примерной программы без выделения курсивом.

Примерная программа выполняет две основные функции.

Информационно-методическая функция позволяет всем участникам образовательного процесса получить представление о целях, содержании, общей стратегии обучения, воспитания и развития учащихся средствами данного учебного предмета.

Организационно-планирующая функция предусматривает выделение этапов обучения, структурирование учебного материала, определение его количественных и качественных характеристик на каждом из этапов, в том числе для содержательного наполнения промежуточной аттестации учащихся.

Примерная программа является ориентиром для составления авторских учебных программ и учебников. Примерная программа определяет инвариантную (обязательную) часть учебного курса, за пределами которого остается возможность авторского выбора вариативной составляющей содержания образования. При этом авторы учебных программ и учебников могут предложить собственный подход в части структурирования учебного материала, определения последовательности изучения этого материала, а также путей формирования системы знаний, умений и способов деятельности, развития и социализации учащихся. Тем самым примерная программа содействует сохранению единого образовательного пространства, не сковывая творческой инициативы учителей и авторов учебников, предоставляет широкие возможности для реализации различных подходов к построению учебного курса.

Структура документа

Примерная программа включает три раздела: ***пояснительную записку***; ***основное содержание*** с примерным распределением учебных часов по разделам курса; ***требования*** к уровню подготовки выпускников.

Общая характеристика учебного предмета

В профильном курсе содержание образования, представленное в основной школе, развивается в следующих направлениях:

систематизация сведений о числах; формирование представлений о расширении числовых множеств от натуральных до комплексных как способе построения нового математического аппарата для решения задач окружающего мира и внутренних задач математики; совершенствование техники вычислений;

развитие и совершенствование техники алгебраических преобразований, решения уравнений, неравенств, систем;

систематизация и расширение сведений о функциях, совершенствование графических умений; знакомство с основными идеями и методами математического анализа в объеме, позволяющем исследовать элементарные функции и решать простейшие геометрические, физические и другие прикладные задачи;

расширение системы сведений о свойствах плоских фигур, систематическое изучение свойств пространственных тел, развитие представлений о геометрических измерениях;

развитие представлений о вероятностно-статистических закономерностях в окружающем мире;

совершенствование математического развития до уровня, позволяющего свободно применять изученные факты и методы при решении задач из различных разделов курса, а также использовать их в нестандартных ситуациях;

формирование способности строить и исследовать простейшие математические модели при решении прикладных задач, задач из смежных дисциплин, углубление знаний об особенностях применения математических методов к исследованию процессов и явлений в природе и обществе.

Цели

Изучение математики в старшей школе на профильном уровне направлено на достижение следующих целей:

- **формирование** представлений об идеях и методах математики; о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов;
- **овладение** устным и письменным математическим языком, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественно-научных дисциплин, для продолжения образования и освоения избранной специальности на современном уровне;
- **развитие** логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, развитие математического мышления и интуиции, творческих способностей на уровне, необходимом для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности;
- **воспитание** средствами математики культуры личности через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; понимания значимости математики для общественного прогресса.

Место предмета в базисном учебном плане

Согласно Федеральному базисному учебному плану для образовательных учреждений Российской Федерации для обязательного изучения математики на этапе основного общего образования отводится не менее 420 ч из расчета 6 ч в неделю. При этом учебное время может быть увеличено до 12 уроков в неделю за счет школьного компонента с учетом элективных курсов. Примерная программа рассчитана на 408 учебных часов. При этом в ней предусмотрен резерв свободного учебного времени в объеме 50 учебных часов для реализации авторских подходов, использования разнообразных форм организации учебного процесса, внедрения современных методов обучения и педагогических технологий.

Общеучебные умения, навыки и способы деятельности

В ходе изучения математики в профильном курсе старшей школы учащиеся продолжают овладение разнообразными способами деятельности, приобретают и совершенствуют опыт:

проведения доказательных рассуждений, логического обоснования выводов;

использования различных языков математики для иллюстрации, интерпретации, аргументации и доказательства;

решения широкого класса задач из различных разделов курса, поисковой и творческой деятельности при решении задач повышенной сложности и нетиповых задач;

планирования и осуществления алгоритмической деятельности: выполнения и самостоятельного составления алгоритмических предписаний и инструкций на математическом материале; использования и самостоятельного составления формул на основе обобщения частных случаев и результатов эксперимента; выполнения расчетов практического характера;

построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач, задач из смежных дисциплин и реальной жизни; проверки и оценки результатов своей работы, соотнесения их с поставленной задачей, с личным жизненным опытом;

самостоятельной работы с источниками информации, анализа, обобщения и систематизации полученной информации, интегрирования ее в личный опыт.

Результаты обучения

Результаты обучения представлены в Требованиях к уровню подготовки и задают систему итоговых результатов обучения, которых должны достигать все выпускники, изучавшие курс математики по профильному уровню, и достижение которых является обязательным условием положительной аттестации ученика за курс средней (полной) школы. Эти требования структурированы по трем компонентам: «знать/понимать», «уметь», «использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни». При этом последние два компонента представлены отдельно по каждому из разделов содержания.

Очерченные стандартом рамки содержания и требований ориентированы на развитие учащихся и не должны препятствовать достижению более высоких уровней.

Основное содержание

ГЕОМЕТРИЯ
(120 ч)

Геометрия на плоскости.

Свойство биссектрисы угла треугольника. Решение треугольников. Вычисление биссектрис, медиан, высот, радиусов вписанной и описанной окружностей. Формулы площади треугольника: формула Герона, выражение площади треугольника через радиус вписанной и описанной окружностей.

Вычисление углов с вершиной внутри и вне круга, угла между хордой и касательной.

Теорема о произведении отрезков хорд. Теорема о касательной и секущей. Теорема о сумме квадратов сторон и диагоналей параллелограмма.

Вписанные и описанные многоугольники. Свойства и признаки вписанных и описанных четырехугольников.

Геометрические места точек.

Решение задач с помощью геометрических преобразований и геометрических мест.

Теорема Чевы и теорема Менелая.

Эллипс, гипербола, парабола как геометрические места точек.

Неразрешимость классических задач на построение.

Прямые и плоскости в пространстве. Основные понятия стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство). Понятие об аксиоматическом способе построения геометрии.

Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых. Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства. Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства.

Двугранный угол, линейный угол двугранного угла.

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Параллельное проектирование. Ортогональное проектирование. Площадь ортогональной проекции многоугольника. Изображение пространственных фигур. Центральное проектирование.

Многогранники. Вершины, ребра, грани многогранника. Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.

Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Прямая и наклонная призмы. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.

Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Треугольная пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.

Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде.

Понятие о симметрии в пространстве (центральная, осевая, зеркальная).

Сечения многогранников. Построение сечений.

Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Тела и поверхности вращения. Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.

Шар и сфера, их сечения. Эллипс, гипербола, парабола как сечения конуса.

Касательная плоскость к сфере. Сфера, вписанная в многогранник; сфера, описанная около многогранника.

Цилиндрические и конические поверхности.

Объемы тел и площади их поверхностей. Понятие об объеме тела. Отношение объемов подобных тел.

Формулы объема куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Координаты и векторы. Декартовы координаты в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы и плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.

Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

Компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам.

Требования к уровню подготовки выпускников

В результате изучения математики на профильном уровне в старшей школе ученик должен

знать/понимать[1]:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки;
- идеи расширения числовых множеств как способа построения нового математического аппарата для решения практических задач и внутренних задач математики;
- значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций;
- возможности геометрического языка как средства описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;
- различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;
- роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знания и для практики;
- вероятностный характер различных процессов и закономерностей окружающего мира.

ГЕОМЕТРИЯ

Уметь:

- соотносить плоские геометрические фигуры и трехмерные объекты с их описаниями, чертежами, изображениями; различать и анализировать взаимное расположение фигур;

---

[1] Помимо указанных в данном разделе знаний, в требования к уровню подготовки включаются также знания, необходимые для освоения перечисленных ниже умений.

- изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи;
- решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;
- проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса;
- вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, объемы и площади поверхностей пространственных тел и их простейших комбинаций;
- применять координатно-векторный метод для вычисления отношений, расстояний и углов;
- строить сечения многогранников и изображать сечения тел вращения.

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
- вычисления длин, площадей и объемов реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.

Программа по геометрии (базовый и профильный уровни)

10 КЛАСС

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ[1]

1. Введение

Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии. Некоторые следствия из аксиом.

Основная цель — познакомить учащихся с содержанием курса стереометрии, с основными понятиями и аксиомами, принятыми в данном курсе, вывести первые следствия из аксиом, дать представление о геометрических телах и их поверхностях, об изображении пространственных фигур на чертеже, о прикладном значении геометрии.

Изучение стереометрии должно базироваться на сочетании наглядности и логической строгости. Опора на наглядность — непременное условие успешного усвоения материала, и в связи с этим нужно уделить большое внимание правильному изображению на чертеже пространственных фигур. Однако наглядность должна быть пронизана строгой логикой. Курс стереометрии предъявляет в этом отношении более высокие требования к учащимся. В отличие от курса планиметрии здесь уже с самого начала формулируются аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, и далее изучение свойств взаимного расположения прямых и плоскостей проходит на основе этих аксиом. Тем самым задается высокий уровень строгости в логических рассуждениях, который должен выдерживаться на протяжении всего курса.

2. Параллельность прямых и плоскостей

Параллельность прямых, прямой и плоскости. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми. Параллельность плоскостей. Тетраэдр и параллелепипед.

Основная цель — сформировать представления учащихся о возможных случаях взаимного расположения двух прямых в пространстве (прямые пересекаются, пря-

[1] Материал, относящийся к профильному уровню, выделен в тексте курсивом.

мые параллельны, прямые скрещиваются), прямой и плоскости (прямая лежит в плоскости, прямая и плоскость пересекаются, прямая и плоскость параллельны), изучить свойства и признаки параллельности прямых и плоскостей.

Особенность данного курса состоит в том, что уже в первой главе вводятся в рассмотрение тетраэдр и параллелепипед и устанавливаются некоторые их свойства. Это дает возможность отрабатывать понятия параллельности прямых и плоскостей (а в следующей главе также и понятия перпендикулярности прямых и плоскостей) на этих двух видах многогранников, что, в свою очередь, создает определенный задел к главе «Многогранники». Отдельный пункт посвящен построению на чертеже сечений тетраэдра и параллелепипеда, что представляется важным как для решения геометрических задач, так и, вообще, для развития пространственных представлений учащихся.

В рамках этой темы учащиеся знакомятся также с параллельным проектированием и его свойствами, используемыми при изображении пространственных фигур на чертеже.

3. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей. *Трехгранный угол. Многогранный угол.*

Основная цель — ввести понятия перпендикулярности прямых и плоскостей, изучить признаки перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей, ввести основные метрические понятия: расстояние от точки до плоскости, расстояние между параллельными плоскостями, между параллельными прямой и плоскостью, расстояние между скрещивающимися прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями, изучить свойства прямоугольного параллелепипеда.

Понятие перпендикулярности и основанные на нем метрические понятия (расстояния, углы) существенно расширяют класс стереометрических задач, появляется много задач на вычисление, широко использующих известные факты из планиметрии.

4. Многогранники

Понятие многогранника. Призма. Пирамида. Правильные многогранники.

Основная цель — познакомить учащихся с основными видами многогранников (призма, пирамида, усеченная пирамида), с формулой Эйлера для выпуклых многогранников, с правильными многогранниками и элементами их симметрии.

С двумя видами многогранников — тетраэдром и параллелепипедом — учащиеся уже знакомы. Теперь эти представления расширяются. Многогранник определяется как поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело (его тоже называют многогранником). В связи с этим уточняется само понятие геометрического тела, для чего вводится еще ряд новых понятий (граничная точка фигуры, внутренняя точка и т. д.). Усвоение их не является обязательным для всех учащихся, можно ограничиться наглядным представлением о многогранниках.

Наряду с формулой Эйлера в этом разделе содержится также один из вариантов пространственной теоремы Пифагора, связанный с тетраэдром, у которого все плоские углы при одной вершине — прямые. Доказательство основано на формуле площади прямоугольной проекции многоугольника, которая предварительно выводится.

5. Повторение. Решение задач

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант: 1,5 ч в неделю, всего 51 ч
II вариант: 2 ч в неделю, всего 68 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Некоторые сведения из планиметрии[1]		**—**	**12**
1	Углы и отрезки, связанные с окружностью	—	4
2	Решение треугольников	—	4
3	Теоремы Менелая и Чевы	—	2
4	Эллипс, гипербола и парабола	—	2
Введение (Предмет стереометрии. Основные понятия и аксиомы стереометрии. Первые следствия из теорем)		**3**	**3**

[1] В содержание курса геометрии в 10—11 классах на профильном уровне входит ряд тем из планиметрии. В учебнике они изложены в последней главе «Некоторые сведения из планиметрии» (пп. 85—99). Их можно рассмотреть вместе с соответствующими темами стереометрии.

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава I. Параллельность прямых и плоскостей		**16**	**16**
1	Параллельность прямых, прямой и плоскости	4	4
2	Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми. Контрольная работа № 1.1 (20 мин)	4	4
3	Параллельность плоскостей	2	2
4	Тетраэдр и параллелепипед	4	4
	Контрольная работа № 1.2 Зачет № 1	1 1	1 1
Глава II. Перпендикулярность прямых и плоскостей		**17**	**17**
1	Перпендикулярность прямой и плоскости	5	5
2	Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью	6	6
3	Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	4	4
	Контрольная работа № 2.1 Зачет № 2	1 1	1 1
Глава III. Многогранники		**12**	**14**
1	Понятие многогранника. Призма	3	3
2	Пирамида	3	4
3	Правильные многогранники	4	5
	Контрольная работа № 3.1 Зачет № 3	1 1	1 1
Заключительное повторение курса геометрии 10 класса		**3**	**6**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1.1[1]

Вариант 1

1. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.
а) Каково взаимное расположение прямых EF и AB?
б) Чему равен угол между прямыми EF и AB, если $\angle ABC = 150°$? Ответ обоснуйте.

2. Дан пространственный четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD равны. Середины сторон этого четырехугольника соединены последовательно отрезками.
а) Выполните рисунок к задаче.
б)* Докажите, что полученный четырехугольник — ромб.

Вариант 2

1. Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC. Точка P — середина стороны AD, точка K — середина стороны DC.
а) Каково взаимное расположение прямых PK и AB?
б) Чему равен угол между прямыми PK и AB, если $\angle ABC = 40°$ и $\angle BCA = 80°$? Ответ обоснуйте.

2. Дан пространственный четырехугольник $ABCD$, M и N — середины сторон AB и BC соответственно, $E \in CD$, $K \in DA$, $DE : EC = 1 : 2$, $DK : KA = 1 : 2$.
а) Выполните рисунок к задаче.
б)* Докажите, что четырехугольник $MNEK$ — трапеция.

Контрольная работа № 1.2

Вариант 1

1. Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть: а) параллельными; б) скрещивающимися? Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

2. Через точку O, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, прямая m — в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка A_2B_2, если $A_1B_1 = 12$ см, $B_1O : OB_2 = 3 : 4$.

---

[1] В контрольных работах задачи, помеченные звездочкой, относятся к профильному уровню.

3*. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки M, N и K, являющиеся серединами ребер AB, BC и DD_1.

Вариант 2

1. Прямые a и b лежат в пересекающихся плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть: а) параллельными; б) скрещивающимися? Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

2. Через точку O, не лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках A_1 и A_2 соответственно, прямая m — в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $A_2B_2 = 15$ см, $OB_1 : OB_2 = 3 : 5$.

3*. Изобразите тетраэдр $DABC$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки M и N, являющиеся серединами ребер DC и BC, и точку K, такую, что $K \in DA$, $AK : KD = 1 : 3$.

Контрольная работа № 2.1

Вариант 1

1. Диагональ куба равна 6 см. Найдите:
а) ребро куба;
б) косинус угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

2. Сторона AB ромба $ABCD$ равна a, один из углов ромба равен $60°$. Через сторону AB проведена плоскость α на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точки D.
а) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.
б) Покажите на рисунке линейный угол двугранного угла $DABM$, $M \in \alpha$.
в)* Найдите синус угла между плоскостью ромба и плоскостью α.

Вариант 2

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{6}$ см, а его измерения относятся как $1 : 1 : 2$. Найдите:
а) измерения параллелепипеда;
б) синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

2. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. Через сторону AD проведена плоскость α на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точки B.

а) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.
б) Покажите на рисунке линейный угол двугранного угла $BADM$, $M \in \alpha$.
в)* Найдите синус угла между плоскостью квадрата и плоскостью α.

Контрольная работа № 3.1

Вариант 1

1. Основанием пирамиды $DABC$ является правильный треугольник ABC, сторона которого равна a. Ребро DA перпендикулярно к плоскости ABC, а плоскость DBC составляет с плоскостью ABC угол 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна a и угол равен 60°. Плоскость AD_1C_1 составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите:
а) высоту ромба;
б) высоту параллелепипеда;
в) площадь боковой поверхности параллелепипеда;
г)* площадь поверхности параллелепипеда.

Вариант 2

1. Основанием пирамиды $MABCD$ является квадрат $ABCD$, ребро MD перпендикулярно к плоскости основания, $AD = DM = a$. Найдите площадь поверхности пирамиды.

2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$, стороны которого равны $a\sqrt{2}$ и $2a$, острый угол равен 45°. Высота параллелепипеда равна меньшей высоте параллелограмма. Найдите:
а) меньшую высоту параллелограмма;
б) угол между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания;
в) площадь боковой поверхности параллелепипеда;
г)* площадь поверхности параллелепипеда.

11 КЛАСС

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ[1]

1. Векторы в пространстве

Понятие вектора в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Компланарные векторы.

Основная цель — закрепить известные учащимся из курса планиметрии сведения о векторах и действиях над ними, ввести понятие компланарных векторов в пространстве и рассмотреть вопрос о разложении любого вектора по трем данным некомпланарным векторам.

Основные определения, относящиеся к действиям над векторами в пространстве, вводятся так же, как и для векторов на плоскости. Поэтому изложение этой части материала является достаточно сжатым. Более подробно рассматриваются вопросы, характерные для векторов в пространстве: компланарность векторов, правило параллелепипеда сложения трех некомпланарных векторов, разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

2. Метод координат в пространстве. Движения

Координаты точки и координаты вектора. Скалярное произведение векторов. *Уравнение плоскости.* Движения. *Преобразование подобия.*

Основная цель — сформировать умение учащихся применять векторно-координатный метод к решению задач на вычисление углов между прямыми и плоскостями и расстояний между двумя точками, от точки до плоскости.

Данный раздел является непосредственным продолжением предыдущего. Вводится понятие прямоугольной системы координат в пространстве, даются определения координат точки и координат вектора, рассматриваются простейшие задачи в координатах. Затем вводится скалярное произведение векторов, кратко перечисляются его свойства (без доказательства, поскольку соответствующие доказательства были в курсе планиметрии) и выводятся формулы для вычисления углов между двумя прямыми, между прямой и плоскостью. Дан также вывод уравнения плоскости и формулы расстояния от точки до плоскости.

В конце раздела изучаются движения в пространстве: центральная симметрия, осевая симметрия, зеркальная симметрия. Кроме того, рассмотрено преобразование подобия.

---

[1] Материал, относящийся к профильному уровню, выделен в тексте курсивом.

3. Цилиндр, конус, шар

Понятие цилиндра. Площадь поверхности цилиндра. Понятие конуса. Площадь поверхности конуса. Усеченный конус. Сфера и шар. Уравнение сферы. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость к сфере. Площадь сферы.

Основная цель — дать учащимся систематические сведения об основных телах и поверхностях вращения — цилиндре, конусе, сфере, шаре.

Изучение круглых тел (цилиндра, конуса, шара) и их поверхностей завершает знакомство учащихся с основными пространственными фигурами. Вводятся понятия цилиндрической и конической поверхностей, цилиндра, конуса, усеченного конуса. С помощью разверток определяются площади их боковых поверхностей, выводятся соответствующие формулы. Затем даются определения сферы и шара, выводится уравнение сферы и с его помощью исследуется вопрос о взаимном расположении сферы и плоскости. Площадь сферы определяется как предел последовательности площадей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани. В задачах рассматриваются различные комбинации круглых тел и многогранников, в частности описанные и вписанные призмы и пирамиды.

В данном разделе изложены также вопросы о взаимном расположении сферы и прямой, о сечениях цилиндрической и конической поверхностей различными плоскостями.

4. Объемы тел

Объем прямоугольного параллелепипеда. Объемы прямой призмы и цилиндра. Объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса. Объем шара и площадь сферы. Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.

Основная цель — ввести понятие объема тела и вывести формулы для вычисления объемов основных многогранников и круглых тел, изученных в курсе стереометрии.

Понятие объема тела вводится аналогично понятию площади плоской фигуры. Формулируются основные свойства объемов и на их основе выводится формула объема прямоугольного параллелепипеда, а затем прямой призмы и цилиндра. Формулы объемов других тел выводятся с помощью интегральной формулы. Формула объема шара используется для вывода формулы площади сферы.

5. Некоторые сведения из планиметрии

Углы и отрезки, связанные с окружностью. Решение треугольников. Теоремы Менелая и Чевы. Эллипс, гипербола и парабола.

Основная цель — расширить известные учащимся сведения о геометрических фигурах на плоскости: рассмотреть ряд теорем об углах и отрезках, связанных с окружностью, о вписанных и описанных четырехугольниках; вывести формулы для медианы и биссектрисы треугольника, а также формулы площади треугольника, использующие радиусы вписанной и описанной окружностей; познакомить учащихся с такими интересными объектами, как окружность и прямая Эйлера, с теоремами Менелая и Чевы, и, наконец, дать геометрические определения эллипса, гиперболы, параболы и вывести их канонические уравнения.

Изучение этих теорем и формул целесообразно совместить с рассмотрением тех или иных вопросов стереометрии:

- теоремы об углах и отрезках, связанных с окружностью, рассмотреть при изучении темы «Сфера и шар»;
- различные формулы, связанные с треугольником, — при изучении темы «Многогранники», в частности, теоремы Менелая и Чевы — в связи с задачами на построение сечений многогранников;
- сведения об эллипсе, гиперболе и параболе использовать при рассмотрении сечений цилиндрической и конической поверхностей.

6. Обобщающее повторение

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант: 1,5 ч в неделю, всего 51 ч
II вариант: 2 ч в неделю, всего 68 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава IV. Векторы в пространстве		**6**	**6**
1	Понятие вектора в пространстве	1	1
2	Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число	2	2
3	Компланарные векторы	2	2
	Зачет № 4	1	1
Глава V. Метод координат в пространстве		**11**	**15**
1	Координаты точки и координаты вектора	4	6
2	Скалярное произведение векторов	5	7

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
	Контрольная работа № 5.1 Зачет № 5	1 1	1 1
Глава VI. Цилиндр, конус, шар		**13**	**16**
1	Цилиндр	3	3
2	Конус	3	4
3	Сфера	5	7
	Контрольная работа № 6.1 Зачет № 6	1 1	1 1
Глава VII. Объемы тел		**15**	**17**
1	Объем прямоугольного параллелепипеда	2	3
2	Объем прямой призмы и цилиндра	3	2
3	Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса	4	5
4	Объем шара и площадь сферы	4	5
	Контрольная работа № 7.1 Зачет № 7	1 1	1 1
Заключительное повторение при подготовке к итоговой аттестации по геометрии		**6**	**14**

Примечания.

1) При решении задач, связанных с сечением тетраэдра некоторой плоскостью, часто оказывается полезной теорема Менелая. Поэтому изучение п. 14 учебника «Задачи на построение сечений» целесообразно совместить с изучением теорем Менелая и Чевы (пп. 95 и 96).

2) В п. 58 введено понятие центрального подобия в пространстве. Рассмотрение этого понятия можно совместить с изучением п. 94, где с помощью центрального подобия (на плоскости) решена задача о прямой и окружности Эйлера для треугольника. Целесообразно начать с изучения п. 94, затем перейти к п. 58, а при рассмотрении вопросов, связанных со сферой (пп. 64—69), решить красивые задачи 814 и 815 о прямой и сфере Эйлера для тет-

раэдра. Вторая задача решается на основе первой, и при этом эффективно используется центральное подобие.

3) В пп. 72 и 73 учебника рассматриваются сечения цилиндрической и конической поверхностей. При этом используются свойства эллипса, гиперболы и параболы, которые описаны в пп. 97—99. Поэтому перед изучением пп. 72 и 73 следует ознакомиться с содержанием пп. 97—99.

4) Другие теоремы и формулы, включенные в главу «Некоторые сведения из планиметрии», могут быть изучены по мере надобности при рассмотрении тех или иных вопросов стереометрии. Так, пп. 85—89, в которых рассматриваются углы и отрезки, связанные с окружностью, а также вписанный и описанный четырехугольники, целесообразно рассмотреть в связи с темой «Сфера и шар», а пп. 90—94, относящиеся к треугольнику, — в связи с темой «Многогранники».

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 5.1

Вариант 1

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 60°$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AD_1 и BM, где M — середина ребра DD_1.

3. При движении прямая a отображается на прямую a_1, а плоскость α — на плоскость α_1. Докажите, что если $a \parallel \alpha$, то $a_1 \parallel \alpha_1$.

Вариант 2

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 60°$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AC и DC_1.

3. При движении прямая a отображается на прямую a_1, а плоскость α — на плоскость α_1. Докажите, что если $a \perp \alpha$, то $a_1 \perp \alpha_1$.

Контрольная работа № 6.1

Вариант 1

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь основания цилиндра равна 16π см^2. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

2. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен $120°$. Найдите: а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен $30°$; б) площадь боковой поверхности конуса.

3. Диаметр шара равен $2m$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом $45°$ к нему. Найдите длину линии пересечения сферы этой плоскостью.

Вариант 2

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 4 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

2. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом $30°$. Найдите:
а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен $60°$;
б) площадь боковой поверхности конуса.

3. Диаметр шара равен $4m$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом $30°$ к нему. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

Контрольная работа № 7.1

Вариант 1

1. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол $60°$. Найдите отношение объемов конуса и шара.

2. Объем цилиндра равен 96π см^3, площадь его осевого сечения — 48 см^2. Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.

Вариант 2

1. В конус, осевое сечение которого есть правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности конуса.

2. Диаметр шара равен высоте цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат. Найдите отношение объемов шара и цилиндра.

А. В. Погорелов

Программа по геометрии (базовый и профильный уровни)

10 КЛАСС

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ

1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии и их связь с аксиомами планиметрии.

Основная цель — сформировать представления учащихся об основных понятиях и аксиомах стереометрии.

Тема играет важную роль в развитии пространственных представлений учащихся, фактически впервые встречающихся здесь с пространственной геометрией. Поэтому преподавание следует вести с широким привлечением моделей, рисунков. В ходе решения задач следует добиваться от учащихся проведения доказательных рассуждений.

2. Параллельность прямых и плоскостей

Параллельные прямые в пространстве. Признак параллельности прямых. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельности плоскостей. Изображение пространственных фигур на плоскости и его свойства.

Основная цель — дать учащимся систематические знания о параллельности прямых и плоскостей в пространстве.

В теме обобщаются известные из планиметрии сведения о параллельности прямых. На примере теоремы о существовании и единственности прямой, параллельной данной, учащиеся получают представления о необходимости заново доказать известные им из планиметрии факты в тех случаях, когда речь идет о точках и прямых пространства, а не о конкретной плоскости.

Задачи на доказательство решаются во многих случаях по аналогии с доказательствами теорем; включение задач на вычисление длин отрезков позволяет целенаправленно провести повторение курса планиметрии: равенства и подобия треугольников; определений, свойств и признаков прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции и т. д.

Свойства параллельного проектирования применяются к решению простейших задач и практическому построению изображений пространственных фигур на плоскости.

3. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикулярные прямые в пространстве. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Свойства перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Признак перпендикулярности плоскостей. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Применение ортогонального проектирования в техническом черчении.

Основная цель — дать учащимся систематические сведения о перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

Материал темы обобщает и систематизирует известные учащимся из планиметрии сведения о перпендикулярности прямых. Изучение теорем о взаимосвязи параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве, а также материал о перпендикуляре и наклонных целесообразно сочетать с систематическим повторением соответствующего материала из планиметрии.

Решения практически всех задач на вычисление сводятся к применению теоремы Пифагора и следствий из нее. Во многих задачах возможность применения теоремы Пифагора или следствий из нее обосновывается теоремой о трех перпендикулярах или свойствами параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Тема имеет важное пропедевтическое значение для изучения многогранников. Фактически при решении многих задач, связанных с вычислением длин перпендикуляра и наклонных к плоскости, речь идет о вычислении элементов пирамид.

4. Декартовы координаты и векторы в пространстве

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками. Координаты середины отрезка. Преобразование симметрии в пространстве. Движение в пространстве. Параллельный перенос в пространстве. Подобие пространственных фигур. Угол между скрещивающимися прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями. Площадь ортогональной проекции многоугольника. Векторы в пространстве. Действия над векторами в пространстве. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Уравнение плоскости.

Основная цель — обобщить и систематизировать представления учащихся о векторах и декартовых координатах; ввести понятия углов между скрещивающимися прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями.

Рассмотрение векторов и системы декартовых координат носит в основном характер повторения, так как векторы изучались в курсе планиметрии, а декартовы координаты — в курсе алгебры девятилетней школы. Новым для учащихся является пространственная система координат и трехмерный вектор.

Различные виды углов в пространстве являются, наряду с расстояниями, основными количественными характеристиками взаимного расположения прямых и плоскостей, которые будут широко использоваться при изучении многогранников и тел вращения.

Следует обратить внимание на те конфигурации, которые ученик будет использовать в дальнейшем: угол между скрещивающимися ребрами многогранника, угол между ребром и гранью многогранника, угол между гранями многогранника.

Основными задачами в данной теме являются задачи на вычисление, в ходе решения которых ученики проводят обоснование правильности выбранного для вычислений угла.

5. Повторение. Решение задач

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант: 1,5 ч в неделю, всего 51 ч
II вариант: 2 ч в неделю, всего 68 ч

Номера пунктов	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
§ 9. Избранные вопросы планиметрии		—	**15**
81—83	Решение треугольников. Вычисление биссектрис и медиан треугольника. Формула Герона и другие формулы для площади треугольника	—	6
84, 85	Теорема Чевы. Теорема Менелая	—	1
86	Свойства и признаки вписанных и описанных четырехугольников	—	2
87, 88	Углы в окружности. Метрические соотношения в окружности	—	1
90, 91	Геометрические места точек в задачах на построение. Геометрические преобразования в задачах на построение	—	3

Номера пунктов	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
89, 92	О разрешимости задач на построение. Эллипс, гипербола, парабола	—	2
§ 1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия		**4**	**5**
1, 2, 5	Аксиомы стереометрии. Существование плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку. Замечание к аксиоме I	2	2
3	Пересечение прямой с плоскостью	1	1
4	Существование плоскости, проходящей через три данные точки	1	2
§ 2. Параллельность прямых и плоскостей		**12**	**12**
7, 8	Параллельные прямые в пространстве. Признак параллельности прямых	3	3
	Контрольная работа № 1	1	1
9	Признак параллельности прямой и плоскости	2	2
10—12	Признак параллельности плоскостей. Существование плоскости, параллельной данной плоскости. Свойства параллельных плоскостей	3	3
13	Изображение пространственных фигур на плоскости	2	2
	Контрольная работа № 2	1	1
§ 3. Перпендикулярность прямых и плоскостей		**15**	**15**
14, 15	Перпендикулярность прямых в пространстве. Признак перпендикулярности прямой и плоскости	2	2
16, 17	Построение перпендикулярных прямой и плоскости. Свойства перпендикулярных прямой и плоскости	2	2
18	Перпендикуляр и наклонная	5	5

Продолжение

Номера пунктов	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
19	Теорема о трех перпендикулярах	2	2
20	Признак перпендикулярности плоскостей	2	2
21	Расстояние между скрещивающимися прямыми	1	1
	Контрольная работа № 3	1	1
§ 4. Декартовы координаты и векторы в пространстве		**18**	**18**
23—25	Введение декартовых координат в пространстве. Расстояние между точками. Координаты середины отрезка	2	2
26, 27	Преобразование симметрии в пространстве. Симметрия в природе и на практике	1	1
28—30	Движение в пространстве. Параллельный перенос в пространстве. Подобие пространственных фигур	1	1
31, 32	Угол между скрещивающимися прямыми. Угол между прямой и плоскостью	2	2
33	Угол между плоскостями	1	1
34	Площадь ортогональной проекции многоугольника	1	1
35	Векторы в пространстве	1	1
36	Действия над векторами в пространстве	3	3
37	Разложение вектора по трем некомпланарным векторам	2	2
38	Уравнение плоскости	3	3
	Контрольная работа № 4	1	1
Повторение		**2**	**3**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Точки K, M, P, T не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые KM и PT пересекаться?

2. Через точки A, B и середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если $AA_1 = 13$ м, $BB_1 = 7$ м, причем отрезок AB не пересекает плоскость α.

3. Точка P не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков PB и PC, параллельна средней линии трапеции.

Вариант 2

1. Прямые EN и KM не лежат на одной плоскости. Могут ли прямые EM и NK пересекаться? (Ответ обоснуйте.)

2. Через точки A, B и середину M отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если $AA_1 = 3$ м, $BB_1 = 17$ м, причем отрезок AB не пересекает плоскость α.

3. Точка E не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков EA и EB, параллельна стороне CD.

Контрольная работа № 2[1]

Вариант 1

1. Плоскости α и β параллельны, причем плоскость α пересекает некоторую прямую a. Докажите, что и плоскость β пересекает прямую a.

2. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, точки K, M, P — середины отрезков AB, BC, CD. Докажите, что плоскость KMP параллельна прямым AC и BD.

3. Даны две параллельные плоскости и не лежащая между ними точка P. Две прямые, проходящие через точку P, пересекают ближнюю к точке P плоскость в точках A_1 и A_2, а

[1] При необходимости облегчить работу, уменьшить нагрузку учащимся можно ограничиться заданиями 2 и 3.

дальнюю — в точках B_1 и B_2 соответственно. Найдите длину отрезка B_1B_2, если $A_1A_2 = 6$ см и $PA_1 : A_1B_1 = 3 : 2$.

4[1]. Постройте проекцию квадрата $ABCD$, зная проекции его вершин A, B и точки пересечения диагоналей O: точки A_1, B_1 и O_1.

Вариант 2

1. Прямые a и b параллельны, причем прямая a пересекает некоторую плоскость α. Докажите, что и прямая b пересекает плоскость α.

2. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, точки K, M, P — середины отрезков AB, AC, AD. Докажите, что плоскости KMP и BCD параллельны.

3. Даны две параллельные плоскости и не лежащая между ними точка P. Две прямые, проходящие через точку P, пересекают ближнюю к точке P плоскость в точках A_1 и A_2, а дальнюю — в точках B_1 и B_2 соответственно. Найдите длину отрезка B_1B_2, если $A_1A_2 = 10$ см и $PA_1 : A_1B_1 = 2 : 3$.

4. Постройте проекцию правильного треугольника, зная проекции его вершины A и середин K, M сторон AB и BC: точки A_1, K_1 и M_1.

Контрольная работа № 3[2]

Вариант 1

1. Концы отрезка AB, не пересекающего плоскость, удалены от нее на расстояния 2,4 м и 7,6 м. Найдите расстояние от середины M отрезка AB до этой плоскости.

2. Перекладина длиной 5 м своими концами лежит на двух вертикальных столбах высотой 3 м и 6 м. Каково расстояние между основаниями столбов?

3. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 17 см и 15 см. Проекция одной из них на 4 см больше проекции другой. Найдите проекции наклонных.

4. Из вершины равностороннего треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Чему равно расстояние от точки D до прямой BC, если $AD = 1$ дм, $BC = 8$ дм?

---

[1] Задачу 4 в обоих вариантах нужно снабдить чертежом, на котором заданные три точки образуют треугольник общего вида.

[2] При необходимости упростить работу можно исключить задание 3.

Вариант 2

1. Точка A лежит в плоскости, точка B — на расстоянии 12,5 м от нее. Найдите расстояние от плоскости до точки M, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = 2 : 3$.

2. Какой длины нужно взять перекладину, чтобы ее можно было положить концами на две вертикальные опоры высотой 4 м и 8 м, поставленные на расстоянии 3 м одна от другой?

3. Из точки к плоскости проведены две наклонные, одна из которых на 6 см длиннее другой. Проекции наклонных равны 17 см и 7 см. Найдите наклонные.

4. Из вершины квадрата $ABCD$ восставлен перпендикуляр AE к плоскости квадрата. Чему равно расстояние от точки E до прямой BD, если $AE = 2$ дм, $AB = 8$ дм?

Контрольная работа № 4

Вариант 1

Даны точки A (0; 0; 2) и B (1; 1; –2), O — начало координат.

1. На оси y найдите точку M (0; y; 0), равноудаленную от точек A и B.

2. В плоскости xy найдите точку C (x; y; 0), такую, чтобы векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BO}$ были коллинеарными.

3. При каком значении x вектор $\vec{v}$ (x; 2; 1) будет перпендикулярен вектору $\overrightarrow{AB}$?

Вариант 2

Даны точки A (0; –2; 0) и B (1; 2; –1), O — начало координат.

1. На оси z найдите точку M (0; 0; z), равноудаленную от точек A и B.

2. Найдите точку C (x; y; z), такую, чтобы векторы $\overrightarrow{CO}$ и $\overrightarrow{AB}$ были равными.

3. При каком значении x вектор $\vec{v}$ (x; 1; 2) будет перпендикулярен вектору $\overrightarrow{BA}$?

11 КЛАСС

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ

1. Многогранники

Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла. Многогранники. Сечения многогранников. Призма. Прямая и правильная призмы. Параллелепипед. Пирамида. Усеченная пирамида. Правильная пирамида. Правильные многогранники.

Основная цель — дать учащимся систематические сведения об основных видах многогранников.

На материале, связанном с изучением пространственных геометрических фигур, повторяются и систематизируются знания учащихся о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, об измерении расстояний и углов в пространстве.

Пространственные представления учащихся развиваются в процессе решения большого числа задач, требующих распознавания различных видов многогранников и форм их сечений, а также построения соответствующих чертежей.

Практическая направленность курса реализуется значительным количеством вычислительных задач.

2. Тела вращения

Тела вращения: цилиндр, конус, шар. Сечения тел вращения. Касательная плоскость к шару. Вписанные и описанные многогранники. Понятие тела и его поверхности в геометрии.

Основная цель — познакомить учащихся с простейшими телами вращения и их свойствами.

Подавляющее большинство задач к этой теме представляет собой задачи на вычисление длин, углов и площадей плоских фигур, что определяет практическую направленность курса. В ходе их решения повторяются и систематизируются сведения, известные учащимся из курсов планиметрии и стереометрии 10 класса, — решение треугольников, вычисление длин окружностей, расстояний и т. д., что позволяет органично построить повторение. При решении вычислительных задач следует поддерживать достаточно высокий уровень обоснованности выводов.

3. Объемы многогранников

Понятие об объеме. Объемы многогранников: прямоугольного и наклонного параллелепипедов, призмы, пирамиды. Равновеликие тела. Объемы подобных тел.

Основная цель — продолжить систематическое изучение многогранников и тел вращения в ходе решения задач на вычисление их объемов.

К этой теме относится учебный материал § 7 и пп. 73—77 из § 8.

Понятие объема и его свойства могут быть изучены на ознакомительном уровне с опорой на наглядные представления и жизненный опыт учащихся. При выводе формул объемов прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, цилиндра и конуса широко привлекаются приближенные вычисления и интуитивные представления учащихся о предельном переходе. От учащихся можно не требовать воспроизведения вывода этих формул. Вывод формулы объема шара проводится с использованием интеграла. Его можно выполнить в качестве решения задач на уроках алгебры и начал анализа. Материал, связанный с выводами формулы объема наклонного параллелепипеда и общей формулы объемов тел вращения, имеет служебный характер: с его помощью затем выводятся формулы объема призмы и объема шара соответственно.

Большинство задач в теме составляют задачи вычислительного характера на непосредственное применение изученных формул, в том числе несложные практические задачи.

4. Объемы и поверхности тел вращения

Объем цилиндра, конуса, шара. Объем шарового сегмента и сектора.

Понятие площади поверхности. Площади боковых поверхностей цилиндра и конуса, площадь сферы.

Основная цель — завершить систематическое изучение тел вращения в процессе решения задач на вычисление площадей их поверхностей.

Понятие площади поверхности вводится с опорой на наглядные представления учащихся, а затем получает строгое определение.

Практическая направленность курса определяется большим количеством задач прикладного характера, что играет существенную роль в организации профориентационной работы с учащимися.

В ходе решения геометрических и несложных практических задач от учащихся требуется умение непосредственно применять изученные формулы. При решении вычислительных задач следует поддерживать достаточно высокий уровень обоснованности выводов.

5. Повторение курса геометрии

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант: 1,5 ч в неделю, всего 51 ч
II вариант: 2 ч в неделю, всего 68 ч

Номера пунктов	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
§ 5. Многогранники		**18**	**18**
39, 40	Двугранный угол. Трехгранный и многогранный углы	1	1
41	Многогранник	1	1
42, 43	Призма. Изображение призмы и построение ее сечений	3	3
44, 45	Прямая призма. Параллелепипед	2	2
46	Прямоугольный параллелепипед	1	1
	Контрольная работа № 5	1	1
47, 48	Пирамида. Построение пирамиды и ее плоских сечений	3	3
49	Усеченная пирамида	1	1
50	Правильная пирамида	2	2
51	Правильные многогранники	2	2
	Контрольная работа № 6	1	1
§ 6. Тела вращения		**7**	**10**
52—54	Цилиндр. Сечения цилиндра плоскостями. Вписанная и описанная призмы	2	2
55—57	Конус. Сечения конуса плоскостями. Вписанная и описанная пирамиды	2	2
58—60	Шар. Сечение шара плоскостью. Симметрия шара	1	1
61	Касательная плоскость к шару	1	3
62—64	Вписанные и описанные многогранники. Пересечение двух сфер. О понятии тела и его поверхности в геометрии	—	1

Продолжение

Номера пунктов	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
	Контрольная работа № 7	1	1
§ 7. Объемы многогранников		**8**	**8**
65, 66	Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда	1	1
67, 68	Объем наклонного параллелепипеда. Объем призмы	3	3
69—71	Равновеликие тела. Объем пирамиды. Объем усеченной пирамиды	2	2
72	Объемы подобных тел	1	1
	Контрольная работа № 8	1	1
§ 8. Объемы и поверхности тел вращения		**8**	**9**
73—75	Объем цилиндра. Объем конуса. Объем усеченного конуса	2	2
76, 77	Объем шара. Объем шарового сегмента и сектора	1	1
78, 79	Площадь боковой поверхности цилиндра. Площадь боковой поверхности конуса	3	4
80	Площадь сферы	1	1
	Контрольная работа № 9	1	1
Повторение		**10**	**23**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Найдите высоту правильной шестиугольной призмы, если сторона ее основания равна a, а меньшая из диагоналей — b.

2. Найдите сторону основания и высоту правильной четырехугольной призмы, если площадь ее полной поверхности равна 40 см^2, а боковая поверхность — 32 см^2.

3. В прямом параллелепипеде с высотой $\sqrt{14}$ м стороны основания $ABCD$ равны 3 м и 4 м, диагональ AC — 6 м. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда, проходящего через вершины B и D.

Вариант 2

1. Найдите высоту правильной шестиугольной призмы, если сторона ее основания равна a, а большая из диагоналей — b.

2. Найдите сторону основания и высоту правильной четырехугольной призмы, если ее боковая поверхность равна 8 см^2, а полная — 40 см^2.

3. В прямом параллелепипеде с высотой $\sqrt{15}$ м стороны основания $ABCD$ равны 2 м и 4 м, диагональ AC — 5 м. Найдите площадь диагонального сечения параллелепипеда, проходящего через вершины B и D.

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Найдите высоту правильной шестиугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а апофема — l.

2. Найдите величину двугранного угла при основании правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°.

3. Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, у которой боковая поверхность равна $60\sqrt{3}$ см^2, а полная поверхность — $108\sqrt{3}$ см^2.

Вариант 2

1. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а апофема — l.

2. Найдите величину двугранного угла при основании правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30°.

3. Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, у которой площадь основания равна $27\sqrt{3}$ см^2, а полная поверхность — $72\sqrt{3}$ см^2.

Контрольная работа № 7

Вариант 1

1. В цилиндре радиуса 5 см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от нее на 3 см. Найдите высоту цилиндра, если площадь указанного сечения равна 64 см^2.

2. Угол при вершине осевого сечения конуса с высотой 1 м равен 60°. Чему равна площадь сечения конуса, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 45°?

3. Сечение шара плоскостью имеет площадь 36π. Чему равен радиус шара, если сечение удалено от его центра на расстояние 8?

Вариант 2

1. В цилиндре с высотой 6 см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от нее на 4 см. Найдите радиус цилиндра, если площадь указанного сечения равна 36 см^2.

2. Угол при вершине осевого сечения конуса с высотой 1 м равен 120°. Чему равна площадь сечения конуса, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°?

3. Линия пересечения сферы с плоскостью имеет длину 18π. Чему равно расстояние от центра сферы до этой плоскости, если радиус сферы равен 15?

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, диагонали граней которого равны $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{10}$ см и $\sqrt{13}$ см?

2. Чему равен объем правильной шестиугольной призмы со стороной основания a и длиной большей диагонали b?

3. Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит параллелограмм со сторонами 2 и $\sqrt{3}$ и углом между ними 30°, если высота пирамиды равна меньшей диагонали основания.

Вариант 2

1. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, площади трех граней которого равны 12 см^2, 15 см^2 и 20 см^2?

2. Чему равен объем правильной треугольной призмы со стороной основания a и расстоянием от вершины одного основания до противолежащей стороны другого основания, равным b?

3. Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит параллелограмм с диагоналями 4 и $2\sqrt{3}$, если угол между ними $30°$, а высота пирамиды равна меньшей стороне основания.

Контрольная работа № 9

Вариант 1

1. У конуса объема 12 дм^3 высоту увеличили в 4 раза, а радиус основания уменьшили в 2 раза. Чему равен объем нового конуса?

2. Каким должен быть радиус основания цилиндра с квадратным осевым сечением, для того чтобы его боковая поверхность была такая же, как поверхность шара радиуса 1,5 м?

3. Чему равна полная площадь поверхности цилиндра, описанного около правильной треугольной призмы, все ребра которой равны a?

4. Чему равен объем шара, описанного около куба с ребром 2?

Вариант 2

1. У цилиндра объема 35 дм^3 высоту увеличили в 3 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Чему равен объем нового цилиндра?

2. Каким должен быть радиус основания цилиндра с квадратным осевым сечением, для того чтобы его объем был такой же, как у шара радиуса 3 м?

3. Чему равна полная поверхность конуса, описанного около правильного тетраэдра с ребрами длины a?

4. Чему равна площадь сферы, описанной около куба с ребром 1?

А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик

Программа по геометрии (базовый и профильный уровни)[1]

Цели курса геометрии старшей школы (10—11 классы) включают четыре *общие* цели изучения математики, с которых начинается Стандарт среднего (полного) общего образования по математике, а также содержат цели, *специфические* именно для курса геометрии старшей школы:

1) систематическое изучение свойств геометрических фигур в пространстве и развитие пространственных представлений;

2) развитие логического мышления и *знакомство с ролью аксиоматики в математике на примере построения курса стереометрии на аксиоматической основе*;

3) развитие практического понимания геометрии, ее возможностей для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;

4) *повторение важнейших фактов курса планиметрии основной школы и знакомство с более трудными вопросами планиметрии;*

5) подготовка геометрического аппарата, необходимого для изучения математики в высших учебных заведениях, а также для изучения смежных дисциплин.

Обязательный минимум содержания программы по геометрии определен Стандартом среднего (полного) общего образования по математике и полностью содержится в учебнике «Геометрия, 10—11».

Требования к уровню подготовки выпускников также заданы Стандартом.

Пояснительная записка
об учебнике «Геометрия, 10—11» А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика

Курс стереометрии в учебниках А. Д. Александрова построен так, что изучать его можно после любого учебника геометрии в основной школе, поскольку плоскость в нем

[1] По учебнику «Геометрия, 10—11», авторы А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик (М.: Просвещение, 2006).

определяется как фигура, на которой выполняется евклидова планиметрия. Каким образом в основной школе была построена планиметрия, не играет никакой роли, так как важнейшие факты евклидовой планиметрии были установлены в любом курсе геометрии основной школы.

В структуре курса стереометрии выделяются три линии: первая линия — это линия *геометрии построений* изучаемых фигур, вторая линия — это линия *геометрии вычислений* величин построенных фигур, а третья линия — это линия *идей и методов современной геометрии*. Ведущей в 10 классе является линия *геометрии построений* (глава 1 «Основания стереометрии» и глава 2 «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей»), а в 11 классе ведущими становятся линия *геометрии вычислений* (глава 5 «Объемы тел и площади их поверхностей») и линия *идей и методов современной геометрии* (глава 6 «Координаты и векторы»).

Две центральные главы учебника «Геометрия, 10—11» — глава 3 «Фигуры вращения» (10 класс) и глава 4 «Многогранники» (11 класс) — посвящены основному предмету стереометрии — геометрическим телам и их поверхностям. Они носят в основном описательный, наглядный характер. Много внимания в этих главах уделяется *симметрии* изучаемых тел — важнейшему общекультурному понятию.

10 КЛАСС

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ[1]

1. Введение

Введение состоит из следующих пунктов: 1. О геометрии. 2. О пространственных фигурах. 3. О теоретической части курса. 4. О задачах. 5. О рисунках.

Основная цель — ориентировать десятиклассников в предмете стереометрии, дать необходимые указания о работе с учебником, восстановить представления о простейших многогранниках, рассматривавшихся в основной школе, дать простейшие необходимые правила изображения на плоскости пространственных фигур.

В пункте «О геометрии» приводится сжатое изложение александровской концепции школьного курса геометрии. Его обязательно надо прочесть ученикам, а если это посчитает нужным учитель, то обсудить в классе.

---

[1] Материал, относящийся к профильному уровню, выделен в тексте курсивом.

2. Основания стереометрии

Аксиомы стереометрии. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. *Основные теоремы о треугольниках и их применение к вычислению высот, медиан и биссектрис треугольника. Теоремы Чевы и Менелая.* Параллельное и *центральное* проектирования. Утверждения существования и единственности. *Построения на плоскости. Метод геометрических мест. Методы преобразований.* Построения в пространстве. Построение пирамид и призм.

Основная цель — развитие логического мышления и знакомство с ролью аксиоматики в математике на примере построения начальных предложений стереометрии на аксиоматической основе; развитие практического понимания геометрии, ее возможностей для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения; *повторение важнейших теорем геометрии треугольника и знакомство с более трудными вопросами геометрии треугольника.*

Построение фигур с теми или иными заданными свойствами — первая и важнейшая задача геометрии. Основной предмет школьного курса геометрии — важнейшие геометрические фигуры. Их надо построить, начиная с самых простых, а затем постепенно переходя к более сложным. Уже в аксиоматике стереометрии и в самых первых теоремах говорится о возможности «построить» ту или иную фигуру: через три данные точки проходит плоскость, через две данные точки проходит прямая, через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и т. п. Слово «проходит» в этих утверждениях возможно заменить словами «можно провести», подчеркивая их конструктивный характер. В главе 1 речь идет не только о построении (существовании) прямых и плоскостей, но и о построении пирамид и призм, а также обсуждаются общие вопросы геометрических построений на плоскости и в пространстве.

В Обязательный минимум содержания профильного курса геометрии включен обширный раздел «Геометрия на плоскости». Если весь этот раздел изучать одним блоком в начале 10 класса, то такое изучение может занять целое полугодие и существенно сократит изучение важнейшего предмета курса геометрии старших классов — стереометрии, что нежелательно. Поэтому в учебнике «Геометрия, 10—11» планиметрический материал разделен на три части, первая из которых, связанная с треугольниками, геометрическими местами и методами построений, изучается в главе 1. Весь материал из раздела «Геометрия на плоскости» изучается в 10 классе.

Аксиома расстояния позволяет уже в начале курса дать определение понятия «равенство фигур» в общем случае.

3. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Связь между перпендикулярностью прямой и плоскости и параллельностью прямых. Основные теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей. Параллельность плоскостей. Параллельность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование. Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между фигурами. Расстояние между фигурами и параллельность. Сонаправленность лучей. Угол между лучами. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Основная цель — изучение важнейших отношений между прямыми и плоскостями — отношений перпендикулярности и параллельности, а также изучение опирающихся на эти отношения понятий расстояний между фигурами и углов между прямыми и плоскостями; дальнейшее развитие пространственных представлений учеников и практического понимания ими геометрии.

Центральная в курсе 10 класса тема «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей» продолжает линию геометрии построений и начинает линию геометрии вычислений, касающуюся в этой теме вычисления расстояний и углов. Перпендикулярность и параллельность — два важнейших отношения геометрии. Перпендикулярность — это метрическое понятие, параллельность — аффинное. В окружающей нас реальности присутствуют прежде всего метрические отношения. Поэтому авторы, стремясь всегда подчеркнуть практическую сторону геометрии, в этой теме сначала изучают отношения перпендикулярности (важнейшим из них является отношение перпендикулярности прямой и плоскости), а затем переходят к отношению параллельности. При таком подходе окажется, что многие теоремы о параллельности являются простыми следствиями теорем о перпендикулярности. Теоремы о перпендикулярности и параллельности А. Д. Александров назвал «строительной геометрией».

Затем вводятся понятия расстояния от точки до фигуры и расстояния между двумя фигурами. Первое из них позволяет легко доказать теорему о ближайшей точке, частным случаем которой является теорема о трех перпендикулярах, и рассмотреть параллельность двух фигур как постоянство расстояний от точек одной фигуры до другой (что и важно для практики). Пространственная теорема Пифагора помогает вычислять расстояния. Изучение углов между прямыми и плоскостями завершает эту тему.

4. Фигуры вращения

Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость сферы. Симметрия сферы и шара. Цилиндр. Конус. Усеченный конус. *Конические сечения. Эллипс, гипербола и парабола как геометрические места точек. Окружности и углы. Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружностей. Теорема о касательной и секущей. Вписанные и описанные четырехугольники.*

Основная цель — познакомить учащихся с простейшими свойствами пространственных фигур вращения (сферы и шара, цилиндра и конуса), с их плоскими сечениями, *а также рассмотреть те планиметрические вопросы, которые входят в Стандарты и связаны с окружностью.*

Изучение сферы и шара, цилиндра и конуса в учебнике «Геометрия, 10—11» предшествует изучению многогранников, так как строение фигур вращения проще строения многогранников: фигуры вращения характеризуются плоской фигурой — своим меридианом (т. е. фигуры вращения как бы двумерны), а для многогранников такой характеристики нет — многогранники, по существу, трехмерны, они сложнее фигур вращения. Стереометрический материал этой темы во многом описательный, теорем в нем мало. В этой теме начинается обсуждение важного вопроса о симметрии фигур.

Построение пирамид и призм в теме «Основания стереометрии» подсказывает, как конструктивно можно определить цилиндры и конусы с произвольным основанием, взяв в качестве их основания любую плоскую фигуру F. Чтобы построить цилиндр, надо из всех точек фигуры F провести параллельные и равные друг другу отрезки, не лежащие в плоскости этой фигуры. Эти отрезки и заполнят цилиндр, основанием которого является фигура F; сами отрезки называются образующими этого цилиндра. Чтобы построить конус с основанием F и с вершиной в некоторой точке P (не лежащей в плоскости фигуры F), надо точку P соединить отрезками со всеми точками фигуры F. Эти отрезки и заполнят конус с вершиной P и основанием F.

Теперь призму (пирамиду) можно определить как цилиндр (конус), основанием которого является многоугольник. Важно отметить, что при таком подходе не требуется сложное понятие многогранника.

Из общих свойств цилиндров и конусов доказываются лишь простые теоремы об их сечениях плоскостями, параллельными их основаниям. В пункте о сечении конуса плоскостью, параллельной плоскости основания конуса, определяется подобие фигур в стереометрии. Выделяются прямые цилиндры как цилиндры, образующие которых перпендикулярны плоскости их основания. Прямые цилиндры затем сыграют важную роль в теории объемов. Традиционный цилиндр вращения — это прямой цилиндр, основание которого — круг. А традиционный конус вращения — это конус, основание которого — круг и вершина которого проектируется в центр основания. Общая точка зрения на цилиндры и конусы и конструктивный подход к их определению делают соответствующий им раздел в школьном курсе стереометрии простым и наглядным. Такой подход существенно облегчит вычисление объемов тел в 11 классе. *В параграфе, посвященном конусу, рассматриваются конические сечения.*

Завершается курс геометрии 10 класса параграфом, посвященным тем планиметрическим вопросам, включенным сейчас в Стандарты профильного уровня курса геометрии в старших классах, которые связаны с окружностью.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант: 1,5 ч в неделю, всего 51 ч
II вариант: 2 ч в неделю, всего 68 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Введение		**2**	**1**
О пространственных фигурах. О рисунках. О геометрии Важнейшие теоремы о треугольниках		1 1	1 —
Глава I. Основания стереометрии		**12**	**20**
1	Аксиомы стереометрии п. 1.6	2 —	2 4
2	Способы задания прямых и плоскостей в пространстве	2	2
3	Взаимное расположение двух прямых в пространстве	3	3

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
4	Параллельное и центральное проектирования	2	2
5	Существование и единственность. Построения п. 5.2 п. 5.3	2 — —	2 2 2
	Контрольная работа № 1	1	1
Глава II. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей		**25**	**26**
6	Перпендикулярность прямой и плоскости	1	1
7	Признак перпендикулярности прямой и плоскости	2	2
8	Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости	2	2
9	Основные теоремы о взаимно перпендикулярных прямой и плоскости	1	1
10	Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей	3	3
	Контрольная работа № 2	1	1
11	Параллельность плоскостей	3	3
12	Параллельность прямой и плоскости	1	2
13	Ортогональное проектирование	3	3
14	Расстояние между фигурами и параллельность	3	3
15	Углы	4	4
	Контрольная работа № 3	1	1

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава. III. Фигуры вращения		**10**	**18**
16	Сфера и шар	3	3
17	Симметрия сферы и шара	1	1
18	Цилиндр	2	2
19	Конус	3	3
20	Геометрия окружности	—	8
	Контрольная работа № 4	1	1
Резерв		**2**	**3**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

При I варианте планирования в контрольных работах выполняются не все из перечисленных заданий (по усмотрению учителя).

Контрольная работа № 1
(по теме «Основания стереометрии»)

Вариант 1

1. Изобразите плоскость α и трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) на ней. Пусть точка M лежит вне плоскости α, а точка K — на плоскости α, но вне трапеции $ABCD$. Изобразите прямые MP и KE, пересекающие прямую BC в точках P и E. Как расположены прямые MP и KE по отношению: а) к плоскости α; б) к прямой AD?

2. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M и N, принадлежащие ребрам C_1C и AB соответственно. Изобразите сечение куба плоскостью NB_1M.

3. Верно ли утверждение: через сторону треугольника и центр описанной вокруг него окружности проходит плоскость, и притом единственная?

4. В пространстве расположены три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Точка A удалена от точек B и C на 10 см, а от прямой BC на 8 см. Найдите расстояние от точки B до точки C.

Вариант 2

1. Изобразите плоскость β и параллелограмм $ABCD$ ($BC \parallel$ AD) на ней. Пусть точка M лежит вне плоскости β, а точка K — на плоскости β, но вне параллелограмма $ABCD$. Изобразите прямые MP и KE, пересекающие прямую AB в точках P и E. Как расположены прямые MP и KE по отношению: а) к плоскости β; б) к прямой CD?

2. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M и N, принадлежащие ребрам AA_1 и BC соответственно. Изобразите сечение куба плоскостью NB_1M.

3. Верно ли утверждение: через медиану треугольника и центр вписанной в него окружности проходит плоскость, и притом единственная?

4. В пространстве расположены три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Точка B удалена от точек A и C на 10 см. Расстояние от точки A до точки C равно 16 см. Найдите расстояние от точки B до прямой AC.

Контрольная работа № 2
(по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»)

Вариант 1

1. К плоскости треугольника ABC, в котором $AC = BC = 5$ и $AB = 8$, через точку A проведен перпендикуляр AP, а через точку C проведена прямая, параллельная AP, на которой отложен отрезок $CO = 4$. Найдите расстояние от точки O до середины стороны AB.

2. В основании пирамиды $PABC$ — прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, а катеты — 5 единиц и 12 единиц. Боковая грань PAB перпендикулярна плоскости основания и имеет площадь 65 квадратных единиц. Найдите высоту пирамиды.

3. Известно, что плоскости α и β взаимно перпендикулярны, $ABCD$ — параллелограмм в плоскости α, $ABMN$ — прямоугольник в плоскости β. Определите, существует ли плоскость, в которой лежат прямые: а) DC и NM; б) DA и AN; в) DA и BM. Найдите величину угла NAD. Найдите длину DN, считая $CB = a$, $AN = b$.

В а р и а н т 2

1. К плоскости треугольника ABC, в котором $AC = AB = 6$, $\angle BAC = 60°$, через точку B проведен перпендикуляр BP, а через точку A проведена прямая, параллельная BP, на которой отложен отрезок $AD = 3$. Найдите расстояние от точки D до середины стороны BC.

2. В основании пирамиды $PABC$ — прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AB = 13$ единиц и $BC = 12$ единиц. Боковая грань PAC перпендикулярна плоскости основания и имеет площадь 15 квадратных единиц. Найдите высоту пирамиды.

3. Известно, что плоскости α и β взаимно перпендикулярны, $ABCD$ — параллелограмм в плоскости α, $ADKP$ — трапеция в плоскости β. Определите, существует ли плоскость, в которой лежат прямые: а) BC и PK; б) DC и AP; в) DC и DK. Найдите величину угла CDK. Найдите длину KC, считая $KD = m$, $AB = n$.

Контрольная работа № 3
(по теме «Проекции, расстояния, углы»)

В а р и а н т 1

1. Изобразите куб $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ и точку M на ребре BB_1, такую, что $B_1M : MB = 1 : 2$. Пусть ребро куба равно 6. Вычислите: а) $|M; C_1|$; б) $|M; CD|$; в) $|A_1A; CD|$; г) $|M; (DCC_1)|$; д) $\operatorname{tg} \angle(MC; (AA_1B_1))$; е) $\operatorname{tg} \angle (AM; CD)$; ж) $\operatorname{tg} \angle ((AMC); (ABC))$.

2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AB = 4$, $AD = 4$. К плоскости параллелограмма проведен перпендикуляр через вершину B и на нем отложен отрезок $BM = 2\sqrt{3}$. Точка K — середина MD. Вычислите: а) $|M; CD|$; б) $|K; (ABC)|$; в) $\angle ((MBD); (MBC))$; г) $\sin \angle ((MDC); (ABC))$.

3. Верно ли утверждение: если две плоскости перпендикулярны к третьей, то они параллельны?

В а р и а н т 2

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точку K на ребре CC_1, такую, что $C_1K : KC = 1 : 3$. Пусть ребро куба равно 4. Вычислите: а) $|K; B_1|$; б) $|K; AD|$; в) $|C_1C; AB|$; г) $|K; (ABB_1)|$; д) $\operatorname{tg} \angle (KB; (CC_1D_1))$; е) $\operatorname{tg} \angle (BK; AD)$; ж) $\operatorname{tg} \angle ((KBD); (ABC))$.

2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AB = 6$, $AD = 6$. К плоскости параллелограмма проведен перпендикуляр через вершину B и на нем отложен отрезок $BK = 3\sqrt{3}$. Точка M — середина KD. Вычислите: а) $|K; AD|$; б) $|M; (ABC)|$; в) $\angle$ $((KBD); (KBA))$; г) $\sin \angle$ $((KAD); (ABC))$.

3. Верно ли утверждение: если две плоскости перпендикулярны к третьей, то они перпендикулярны друг другу?

Контрольная работа № 4
(по теме «Фигуры вращения»)

Вариант 1

1. Сфера касается плоскости α в точке M. На плоскости α взята точка K, удаленная от точки M на 12, а от центра шара на 13. Чему равен диаметр шара?

2. В конусе, образованном вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг меньшего катета, найдите:
а) расстояние от центра основания до образующей конической поверхности;
б) площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от вершины на 1,5;
в) площадь осевого сечения.

Вариант 2

1. Сфера касается плоскости α в точке P. На плоскости α взята точка K, удаленная от точки P на 5, а от центра шара на 13. Чему равен диаметр шара?

2. В конусе, образованном вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг большего катета, найдите:
а) расстояние от центра основания до образующей конической поверхности;
б) площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от вершины на 2;
в) площадь осевого сечения.

11 КЛАСС

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ[1]

1. Многогранники

Призма как частный случай цилиндра. Правильная призма. Параллелепипед. Пирамида как частный случай конуса. Правильная пирамида. Тела и их поверхности. Многогранники. Многогранная поверхность и *развертка*. Теорема Эйлера. Многогранные углы. Правильные многогранники. Преобразования симметрии фигур. Поворот. Элементы симметрии. Симметрия правильных многогранников, правильных призм и правильных пирамид.

Основная цель — определить понятие геометрического тела и дать общее понятие о многограннике как о теле, ограниченном конечным числом многоугольников, рассмотреть наиболее важные частные случаи многогранников и их симметрии.

Чтобы конструктивно определить призмы и пирамиды, общего понятия многогранника не требуется. Определение многогранника как тела, ограниченного конечным числом многоугольников, понадобится лишь для определения правильного многогранника. В свою очередь, определение понятия «тело» требует введения простейших топологических понятий — внутренняя и граничная точка фигуры.

При изучении многогранников большое внимание уделяется их симметрии.

2. Объемы тел и площади их поверхностей

Объемы простых тел. Зависимость объема тела от площадей его сечений. Объемы цилиндра (призмы), конуса (пирамиды), шара. Площадь выпуклой поверхности. Площадь сферы, площадь поверхности цилиндра, площадь поверхности конуса.

Основная цель — определить понятие объема простого тела, понятие площади поверхности выпуклого тела и вывести формулы для вычисления объемов важнейших тел и площадей их поверхностей.

Вопрос об объеме тела и площади его поверхности трудный, и точное его решение выходит за рамки элементарной геометрии. Поэтому в школьном учебнике «Геометрия, 10—11» для получения необходимых результатов используются и наглядно очевидные соображения. Сначала устанавливается, что объем прямого цилиндра с произвольным основанием равен произведению площади основания ци-

[1] Материал, относящийся к профильному уровню, выделен в тексте курсивом.

линдра на его высоту. Затем с помощью этого предложения доказывается, что площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, ортогональной некоторой оси x, равна производной от объема $V(x)$ той части тела, которая лежит с одной стороны от секущей плоскости. Зная для важнейших тел функцию $S(x)$, находим из уравнения $V'(x) = S(x)$ функцию $V(x)$, т. е. находим объемы цилиндров и конусов (в частности, призм и пирамид) и шара.

Измеряя площади выпуклых поверхностей, аппроксимируют их описанными вокруг них многогранниками, но для конусов и цилиндров можно рассмотреть и их развертки.

3. Координаты и векторы

Декартовы координаты в пространстве. Метод координат. Формула для расстояния между точками. Уравнение сферы. Понятие вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по базису. Векторный метод. Параллельный перенос. Координаты вектора. Действия с векторами и действия с координатами. Скалярное умножение векторов. Уравнение плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.

Основная цель — познакомить выпускников средней школы с координатным и векторным методами.

Идеи и методы современной геометрии в школьном курсе геометрии — это преобразования, координаты и векторы. В курсе основной школы они уже рассматривались. Так что с идейной стороны изучение этих вопросов в курсе стереометрии ничего нового не дает. Движения в учебнике «Геометрия, 10—11» ориентированы на изучение симметрии фигур, и все они, кроме параллельного переноса, рассмотрены ранее. А параллельный перенос рассматривается в параграфе «Векторы», где и формулируется теорема о классификации движений в пространстве.

Координаты и векторы по своей природе многомерны. Так что в учебнике «Геометрия, 10—11» они рассматриваются по аналогии с соответствующими планиметрическими вопросами. Фактически происходит повторение темы «Координаты и векторы», изученной еще в основной школе, но на стереометрическом материале.

4. Заключение и итоговое повторение

Современная геометрия (геометрия на поверхности, геометрия Лобачевского, многомерные пространства). Основания геометрии. Геометрия и действительность.

Основная цель — дать представление выпускникам средней школы о геометрии как о живой, развивающейся науке, исследующей окружающий нас мир, а не как о застывшем мертвом предмете, а также подготовить выпускников к итоговой аттестации.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант: 1,5 ч в неделю, всего 51 ч
II вариант: 2 ч в неделю, всего 68 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава IV. Многогранники		**13**	**19**
21	Призма	3	4
22	Пирамида	4	6
23	Многогранники	2	4
24	Правильные многогранники и симметрия фигур	3	4
	Контрольная работа № 5	1	1
Глава V. Объемы тел и площади их поверхностей		**17**	**19**
25	Определение объема	—	1
26	Зависимость объема тела от площадей его сечений	2	2
27	Объемы некоторых тел	6	6
	Контрольная работа № 6	1	1
28	Площадь поверхности	5	5
	Решение задач	2	3
	Контрольная работа № 7	1	1
Глава VI. Координаты и векторы		**15**	**16**
29	Метод координат	4	4
30	Векторы	6	7
31	Координаты и векторы	4	4
	Контрольная работа № 8	1	1
Заключение. Современная геометрия		**1**	**1**
Повторение		**5**	**13**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 5
(по теме «Многогранники»)

Вариант 1

1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором стороны AB и BC равны 20, а сторона AC равна 24. Длина диагонали B_1C равна 30. Найдите:
а) высоту призмы;
б) синус угла наклона диагонали B_1C к плоскости основания ABC;
в) косинус угла наклона B_1C к грани AA_1C_1C;
г) площадь сечения призмы плоскостью AB_1C;
д) тангенс угла наклона этого сечения к плоскости основания;
е) расстояние между прямыми AA_1 и BC;
ж) тангенс угла наклона сечения A_1BC к плоскости основания.

2. В цилиндр с осью $OO_1 = 8$ и радиусом основания 6 вписана правильная треугольная пирамида O_1ABC, в которой основание ABC вписано в нижнее основание цилиндра. Изобразите указанные цилиндр и пирамиду. Найдите:
а) длину бокового ребра пирамиды;
б) площадь основания пирамиды;
в) площадь сечения цилиндра плоскостью, проведенной через сторону основания пирамиды, параллельно оси OO_1;
г) расстояние от оси OO_1 до построенного в пункте «в» сечения.

Вариант 2

1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = 20$ и $BC = 32$. Диагональ A_1B составляет с основанием угол $60°$. Найдите:
а) высоту призмы;
б) длину диагонали A_1B;
в) косинус угла наклона A_1B к грани BB_1C_1C;
г) площадь сечения призмы плоскостью A_1BC;
д) синус угла наклона этого сечения к плоскости основания;
е) расстояние между прямыми AA_1 и BC;
ж) тангенс угла наклона сечения ABC_1 к плоскости основания.

2. В конус с высотой $PO = 8$ и радиусом основания 6 вписана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$.

Изобразите указанные конус и пирамиду. Найдите:
а) длину бокового ребра пирамиды;
б) площадь основания пирамиды;
в) площадь сечения конуса плоскостью, проведенной через вершину конуса и сторону основания пирамиды;
г) расстояние от точки O до построенного в пункте «в» сечения.

Контрольная работа № 6
(по теме «Объемы тел»)

Вариант 1

1. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Высота параллелепипеда вдвое больше стороны квадрата. Площадь сечения, проведенного через противоположные боковые ребра параллелепипеда, равна $18\sqrt{2}$. Найдите:
а) объем параллелепипеда;
б) объем конуса, основанием которого служит круг, вписанный в нижнее основание параллелепипеда, а вершиной — произвольная точка верхнего основания.

2. Основанием пирамиды $PABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, а грани PCD и PAD наклонены к основанию под углами $30°$ и $60°$ соответственно. Высота пирамиды равна h. Из предложенных формул для вычисления объема пирамиды выберите верную:
а) $V = \dfrac{h^3}{3}$; б) $V = \dfrac{h^3}{\sqrt{3}}$; в) $V = h^3\sqrt{3}$.

3. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $CA = 6$, $CB = 8$. Проекцией точки C_1 на плоскость ABC является точка O — середина высоты треугольника ABC, проведенной к гипотенузе AB. Боковое ребро призмы наклонено к основанию под углом α, тангенс которого равен 2,5. Найдите объем призмы и сравните его с объемом шара радиуса 1,5.

Вариант 2

1. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Высота параллелепипеда составляет $\frac{2}{3}$ стороны квадрата. Площадь сечения, проведенного через противоположные боковые ребра параллелепипеда, равна $24\sqrt{2}$. Найдите:

а) объем параллелепипеда;
б) объем конуса, основанием которого служит круг, описанный около нижнего основания параллелепипеда, а вершиной — произвольная точка верхнего основания.

2. Основанием пирамиды $PABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Грани PBC и PCD перпендикулярны к плоскости основания, а грани PAB и PAD наклонены к основанию под углами 45° и 30° соответственно. Высота пирамиды равна h. Из предложенных формул для вычисления объема пирамиды выберите верную:

а) $V = \frac{h^3}{3}$; б) $V = \frac{h^3}{\sqrt{3}}$; в) $V = h^3\sqrt{3}$.

3. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $CA = 6$, $CB = 8$. Проекцией точки C_1 на плоскость ABC является точка O — точка высоты треугольника ABC, проведенной к гипотенузе AB, делящая высоту в отношении $2:1$, считая от вершины прямого угла. Боковое ребро призмы наклонено к основанию под углом α, тангенс которого равен 2,5. Найдите объем призмы и сравните его с объемом шара радиуса 2,5.

Контрольная работа № 7
(по теме «Объемы тел и площади их поверхностей»)

Вариант 1

1. В основании прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда, равная $2d$, образует с боковой гранью угол 30°. Найдите объем параллелепипеда и площадь его боковой поверхности.

2. В основании пирамиды $PABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = \arccos 0{,}6$, $AB = 10$. Плоскости PAB и PBC образуют с основанием угол 90°, а грань PAC наклонена к основанию под углом 45°. Найдите объем пирамиды и площадь грани PAC.

3. Рассматриваются всевозможные цилиндры, длина диагонали осевого сечения которых равна $4\sqrt{3}$. Каковы должны быть высота и радиус цилиндра, чтобы его объем был наибольшим? Найдите объем этого цилиндра и площадь его полной поверхности.

Вариант 2

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 6 и образует с плоскостью боковой грани, являющейся квадра-

том, угол 45°. Найдите объем параллелепипеда и площадь его полной поверхности.

2. В основании пирамиды $PABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором диагональ $AC = 10$, а $\angle CAD = \arccos 0{,}8$. Плоскости PAB и PBC образуют с основанием угол 90°, а грань PCD наклонена к основанию под углом 45°. Найдите объем пирамиды и площадь грани PAD.

3. Рассматриваются всевозможные конусы, образующая которых равна $2\sqrt{3}$. Каковы должны быть высота и радиус основания конуса, чтобы его объем был наибольшим? Вычислите объем этого конуса и площадь его поверхности.

Контрольная работа № 8
(по теме «Координаты и векторы»)

Вариант 1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Точка M — середина отрезка B_1C_1, а O — точка пересечения прямых AC и BD. Выразите через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{DB_1}$; б) $\overrightarrow{DM}$; в) $\overrightarrow{MO}$.

2. Заданы точки $A\ (-3;\ 2;\ 5)$, $B\ (2;\ 3;\ 3)$, $C\ (-13;\ 0;\ 9)$, $D\ (4;\ -1;\ 6)$. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, а прямая BD ей перпендикулярна.

3. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, стороны оснований которой равны 2, а боковое ребро равно 4. Точка M — середина ребра BC. Вычислите скалярные произведения векторов:

а) $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{MA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$;
в) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$; г) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

4. Даны единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Известно, что $\angle \vec{a}\vec{b} = 90°$, $\angle \vec{b}\vec{c} = 120°$, $\angle \vec{a}\vec{c} = 120°$. Вычислите:

а) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})$;
б) угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{c}$.

Вариант 2

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Точка M — середина отрезка

C_1D_1, а O — точка пересечения прямых AC и BD. Выразите через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{BD_1}$; б) $\overrightarrow{DM}$; в) $\overrightarrow{OM}$.

2. Заданы точки $A\ (-3;\ -3;\ -2)$, $B\ (-5;\ -2;\ 3)$, $C\ (-9;\ 0;\ 13)$, $D\ (-6;\ 1;\ -4)$. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, а прямая AD ей перпендикулярна.

3. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, стороны оснований которой равны 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра AB. Вычислите скалярные произведения векторов:

а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{MC_1}$ и $\overrightarrow{AB}$;

в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

4. Даны единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Известно, что $\angle \vec{a}\vec{b} = 120°$, $\angle \vec{b}\vec{c} = 60°$, $\angle \vec{a}\vec{c} = 90°$. Вычислите:

а) $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$;

б) угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{c}$.

А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик

Программа по геометрии для углубленного изучения[1]

10 КЛАСС

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ

1. Введение

Основная цель — ориентировать десятиклассников в предмете стереометрии, дать необходимые указания о работе с учебником, восстановить представления о простейших многогранниках, рассматривавшихся в основной школе, дать простейшие необходимые правила изображения на плоскости пространственных фигур.

Во Введении приводится сжатое изложение александровской концепции школьного курса геометрии. Его обязательно надо прочесть ученикам, а если это посчитает нужным учитель, то обсудить в классе.

2. Основания стереометрии

Аксиомы стереометрии. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Основные теоремы о треугольниках и их применение к вычислению высот, медиан и биссектрис треугольника. Теоремы Чевы и Менелая. Параллельное и центральное проектирования. Утверждения существования и единственности. Построения на плоскости. Метод геометрических мест. Методы преобразований. Построения в пространстве. Построение пирамид и призм.

Основная цель — привитие логической культуры мышления и знакомство с ролью аксиоматики в математике на примере построения начальных предложений стереометрии на аксиоматической основе; развитие практического понимания геометрии, ее возможностей для описания свойств и признаков реальных предметов и их взаимного расположения; повторение важнейших теорем геометрии треугольника и знакомство с более трудными вопросами геометрии треугольника.

---

[1] По учебникам «Геометрия, 10» (М.: Просвещение, 2005) и «Геометрия, 11» (М.: Просвещение, 2006), авторы А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.

Построение фигур с теми или иными заданными свойствами — первая и важнейшая задача геометрии. Основной предмет школьного курса геометрии — важнейшие геометрические фигуры. Их надо построить, начиная с самых простых, а затем постепенно переходя к более сложным. Уже в аксиоматике стереометрии и в самых первых теоремах говорится о возможности «построить» ту или иную фигуру: *через три данные точки проходит плоскость, через две данные точки проходит прямая, через две пересекающиеся прямые проходит плоскость* и т. п. Слово «проходит» в этих утверждениях возможно заменить словами «можно провести», подчеркивая их конструктивный характер. В главе 1 речь идет не только о построении (существовании) прямых и плоскостей, но и о построении пирамид и призм, а также обсуждаются общие вопросы геометрических построений на плоскости и в пространстве.

В Обязательный минимум содержания профильного курса геометрии включен обширный раздел «Геометрия на плоскости». Если весь этот раздел изучать одним блоком в начале 10 класса, то такое изучение может занять целое полугодие и существенно сократит изучение важнейшего предмета курса геометрии старших классов — стереометрии, что нежелательно. Поэтому весь этот планиметрический материал помещен в конце учебника «Геометрия, 10». Учитель в зависимости от конкретных обстоятельств может сам решать, когда изучать этот материал. Авторам казалось бы разумным разделить его на три части, первую из которых, связанную с треугольниками, геометрическими местами и методами построений, изучать вместе с материалом главы 1.

Аксиома расстояния позволяет уже в начале курса дать определения понятий «равенство фигур» и «подобие фигур» в общем случае.

3. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Связь между перпендикулярностью прямой и плоскости и параллельностью прямых. Основные теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей. Параллельность плоскостей. Параллельность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование.

Основная цель — изучение важнейших отношений между прямыми и плоскостями — отношений перпендикулярности и параллельности, дальнейшее развитие пространственных представлений учеников и практического понимания ими геометрии.

Центральная в курсе 10 класса тема «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей» продолжает линию геометрии построений. Перпендикулярность и параллельность — два важнейших отношения геометрии. Перпендикулярность — это метрическое понятие, параллельность — аффинное. В окружающей нас реальности присутствуют прежде всего метрические отношения. Поэтому авторы, стремясь всегда подчеркнуть практическую сторону геометрии, в этой теме сначала изучают отношения перпендикулярности (важнейшим из них является отношение перпендикулярности прямой и плоскости), а затем переходят к отношению параллельности. При таком подходе окажется, что многие теоремы о параллельности являются простыми следствиями теорем о перпендикулярности. Теоремы о перпендикулярности и параллельности А. Д. Александров назвал «строительной геометрией».

4. Расстояния и углы

Расстояние от точки до фигуры. Теорема о ближайшей точке. Расстояние между фигурами. Общие перпендикуляры. Пространственная теорема Пифагора. Угол между лучами. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол и угол между плоскостями.

Основная цель — начать линию *вычислений* в стереометрии для расстояний и углов.

Понятие расстояния от точки до фигуры позволяет легко доказать теорему о ближайшей точке, частным случаем которой является теорема о трех перпендикулярах, и рассмотреть параллельность двух фигур как постоянство расстояний от точек одной фигуры до другой (что и важно для практики). Столь же важно для практики и понятие расстояния между двумя фигурами. Пространственная теорема Пифагора помогает вычислять расстояния. Изучение углов между прямыми и плоскостями завершает эту тему. Отметим, что понятия сонаправленности лучей и угла между лучами существенно упрощают изучение углов между векторами и делают его вполне корректным.

5. Пространственные и плоские фигуры и тела

Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость сферы. Симметрия сферы и шара. Опорная плоскость. Выпуклые фигуры. Цилиндр. Конус. Усеченный конус. Конические сечения. Эллипс, гипербола и парабола как геометрические места точек. Окружности и углы. Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружностей. Теорема о касательной и секущей. Вписанные и описанные четырехугольники.

Основная цель — познакомить учащихся с простейшими свойствами пространственных фигур вращения (сферы и шара, цилиндра и конуса), с их плоскими сечениями, а также рассмотреть те планиметрические вопросы, которые входят в Стандарты и связаны с окружностью.

Изучение сферы и шара, цилиндра и конуса в учебнике «Геометрия, 10» предшествует изучению многогранников в учебнике «Геометрия, 11», так как строение фигур вращения проще строения многогранников: фигуры вращения характеризуются плоской фигурой — своим меридианом (т. е. фигуры вращения как бы двумерны), а для многогранников такой характеристики нет — многогранники, по существу, трехмерны, они сложнее фигур вращения. Стереометрический материал этой темы во многом описательный, теорем в нем мало. В этой теме начинается обсуждение важного вопроса о симметрии фигур.

Построение пирамид и призм в теме «Основания стереометрии» подсказывает, как конструктивно можно определить цилиндры и конусы с произвольным основанием, взяв в качестве их основания любую плоскую фигуру F. Чтобы построить цилиндр, надо из всех точек фигуры F провести параллельные и равные друг другу отрезки, не лежащие в плоскости этой фигуры. Эти отрезки и заполнят цилиндр, основанием которого является фигура F; сами отрезки называются образующими этого цилиндра. Чтобы построить конус с основанием F и с вершиной в некоторой точке P (не лежащей в плоскости фигуры F), надо точку P соединить отрезками со всеми точками фигуры F. Эти отрезки и заполнят конус с вершиной P и основанием F.

Теперь призму (пирамиду) можно определить как цилиндр (конус), основанием которого является многоугольник. Важно отметить, что при таком подходе не требуется сложное понятие многогранника.

Из общих свойств цилиндров и конусов доказываются лишь простые теоремы об их сечениях плоскостями, параллельными их основаниям. Выделяются прямые цилиндры как цилиндры, образующие которых перпендикулярны плоскости их основания. Прямые цилиндры затем сыграют важную роль в теории объемов. Традиционный цилиндр вращения — это прямой цилиндр, основание которого — круг. А традиционный конус вращения — это конус, основание которого — круг и вершина которого проектируется в центр основания. Общая точка зрения на цилиндры и конусы и конструктивный подход к их определению делают соответствующий им раздел в школьном курсе стереометрии простым и наглядным. Такой подход существенно облегчит вычисление объемов тел в 11 классе. В параграфе, посвященном конусу, рассматриваются конические сечения.

Завершается курс геометрии 10 класса изучением тех планиметрических вопросов, включенных сейчас в Стандарты профильного уровня курса геометрии в старших классах, которые связаны с окружностью.

Резерв

Оставшиеся часы возможно потратить на изучение тех вопросов, которые помещены в качестве дополнений к параграфам учебника «Геометрия, 10», например «Трехгранные углы», «Сферические треугольники», «Выпуклые тела» и т. п.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант: 2 ч в неделю, всего 68 ч
II вариант: 3 ч в неделю, всего 102 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Введение		**1**	**1**
Глава I. Основания стереометрии		**17**	**18**
1	Аксиомы стереометрии (и повторение основных теорем о треугольниках, п. 20.1)	6	6
2	Способы задания прямых и плоскостей в пространстве	2	2
3	Взаимное расположение двух прямых в пространстве	3	3
4	Параллельное проектирование	2	2
5	Существование и единственность. Построения	2	2
6	Об аксиомах	1	1
	Решение задач	—	1
	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 1 (углубл.)	1 —	— 1
Глава II. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей		**19**	**24**
7	Перпендикулярность прямой и плоскости (зеркальная симметрия)	8	8

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
8	Перпендикулярность плоскостей	3	4
11	Ортогональное проектирование	1	1
	Контрольная работа № 2	1	—
9	Параллельные плоскости	3	5
10	Параллельность прямой и плоскости	2	3
	Решение задач	1	2
	Контрольная работа № 2 (углубл.)	—	1
§ 20. Вернемся к планиметрии		—	4
	п. 20.2. Теоремы Чевы и Менелая	—	2
	п. 20.5. Геометрические места точек	—	2
Глава III. Расстояния и углы		**11**	**20**
12	Расстояние между фигурами	3	6
13	Пространственная теорема Пифагора	1	2
14	Углы. Дополнение к § 14[1]	6	8
	Решение задач	—	3
	Контрольная работа № 3	1	—
	Контрольная работа № 3 (углубл.)	—	1
Глава IV. Пространственные и плоские фигуры и тела		**20**	**30**
15	Сфера и шар. Дополнение к § 15	4	6
16	Опорная плоскость. Выпуклые фигуры	1	2
17	Цилиндры. Дополнение к § 17	2	4
18	Конусы. Усеченные конусы. Дополнение к § 18	3	7

[1] Дополнения к параграфам изучаются при II варианте планирования.

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
19	Тела	1	1
20	Вернемся к планиметрии п. 20.3. Геометрия окружности п. 20.4. Вписанные и описанные четырехугольники п. 20.6. Решение задач с помощью геометрических преобразований	8	 2 2 2
	Решение задач	—	3
	Контрольная работа № 4 Контрольная работа № 4 (углубл.)	1 —	— 1
Резерв		—	9

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольные работы для I варианта планирования приведены на с. 61. Контрольные работы для II варианта планирования (углубл.) составлены на 2 ч. Учитель по своему усмотрению может сократить количество заданий в них или дополнить контрольные работы для I варианта планирования какими-либо заданиями из данных работ. Другие варианты контрольных работ для II варианта планирования приведены в книге В. М. Паповского и др. «Углубленное изучение геометрии в 10 классе».

Контрольная работа № 1

Вариант 1

$ABCD$ — правильный тетраэдр, ребро которого равно 6. Точка K — середина ребра DA, точка L лежит на ребре AC, точка M лежит на ребре DB.

1. Пусть $CL = 2$, $DM = 2$. Нарисуйте сечение тетраэдра, проходящее через точки K, L, M.

2. Пусть $CL = 2$. Где должна находиться на ребре DB точка M, чтобы сечение тетраэдра плоскостью KLM было трапецией?

3. Для трапеции, полученной в п. 2, вычислите LM.

4. Пусть M — середина ребра DB. Рассматриваются всевозможные трапеции с основанием KM, являющиеся сечениями тетраэдра. В каких границах лежит диагональ таких трапеций?

5. Пусть M — середина ребра DB, точка L лежит на ребре AC, $CL = 2$, точка N лежит на ребре CB, $CN = 2$. Чему равна длина отрезка, лежащего в тетраэдре, проходящего через N, пересекающего DA и ML?

6. Может ли площадь сечения, проходящего через KM, равняться 15?

Вариант 2

$ABCD$ — правильный тетраэдр, ребро которого равно 6. Точка K — середина ребра DA, точка L лежит на ребре AC, точка M лежит на ребре DB.

1. Пусть $CL = 4$, $DM = 4$. Нарисуйте сечение тетраэдра, проходящее через точки K, L, M.

2. Пусть $CL = 4$. Где должна находиться на ребре DB точка M, чтобы сечение тетраэдра плоскостью KLM было трапецией?

3. Для трапеции, полученной в п. 2, вычислите LM.

4. Пусть M — середина ребра DB. Рассматриваются всевозможные трапеции с основанием KM, являющиеся сечениями тетраэдра. В каких границах лежит диагональ таких трапеций?

5. Пусть M — середина ребра DB, точка L лежит на ребре AC, $CL = 4$, точка N лежит на ребре CB, $CN = 4$. Чему равна длина отрезка, лежащего в тетраэдре, проходящего через N, пересекающего DA и ML?

6. Может ли площадь сечения, проходящего через KM, равняться 15?

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Основанием четырехугольной пирамиды $PABCD$ является ромб $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны основанию, $\angle ABC = 60°$, $PB = BA = 1$.

1. Через AC проводятся сечения этой пирамиды плоскостями:
а) перпендикулярной PD;
б) параллельной PD;
в) перпендикулярной плоскости ABC.
Расположите площади этих сечений $S_а$, $S_б$, $S_в$ в порядке возрастания.

2. Проводятся сечения, перпендикулярные PD. Какое из них имеет наибольшую площадь проекции на плоскость основания?

Вариант 2

Основанием четырехугольной пирамиды $PABCD$ является ромб $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны основанию, $\angle ABC = 120°$, $PB = BA = 1$.
1. Через AC проводятся сечения этой пирамиды плоскостями:
а) перпендикулярной PD;
б) параллельной PD;
в) перпендикулярной плоскости ABC.
Расположите площади этих сечений $S_а$, $S_б$, $S_в$ в порядке возрастания.

2. Проводятся сечения, перпендикулярные PD. Какое из них имеет наибольшую площадь проекции на плоскость основания?

Контрольная работа № 3

Вариант 1

Две правильные пирамиды $DABC$ и $FABC$ имеют общее основание ABC и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах D и F — прямые. Боковое ребро каждой пирамиды равно 1. Найдите:
а) расстояние от точки C до плоскости ABF;
б) расстояние от точки D до треугольника BCF:
в) угол α между прямыми AD и BF;
г) угол β между прямой AD и плоскостью BCF;
д) угол γ между плоскостями ACD и BCF;
е) площадь проекции грани ADB на плоскость BCF.

Вариант 2

Две правильные пирамиды $DABC$ и $FABC$ имеют общее основание ABC и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах D и F — прямые. $AB = 2$. Найдите:

а) расстояние от точки B до плоскости ADF;
б) расстояние от точки F до треугольника BCD;
в) угол α между прямыми AD и BF;
г) угол β между прямой AD и плоскостью BCF;
д) угол γ между плоскостями ACD и BCF;
е) площадь проекции грани ADB на плоскость BCF.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

Плоскость α является опорной для конуса и шара, причем проходит через основание конуса. Шар и конус имеют единственную общую точку K и лежат с одной стороны от α. Радиус шара равен R, образующая конуса равна L и составляет с основанием угол φ.

1. На каком расстоянии от α находится точка K?

2. При каком R находятся на одной прямой центр шара, центр основания конуса и точка K?

3. Через точку K проводится плоскость β, параллельная α. Могут ли быть равны сечения шара и конуса плоскостью β при некотором R?

4. Пусть радиус шара удовлетворяет условию 3. Сколько подобных шаров можно расположить так, чтобы каждый из них имел единственную точку с плоскостью, конусом и касался двух соседних шаров?

Вариант 2

Плоскость α является опорной для конуса и шара, причем проходит через вершину конуса перпендикулярно его высоте. Шар и конус имеют единственную общую точку K и лежат с одной стороны от α. Радиус шара равен R, образующая конуса равна L и составляет с основанием угол φ.

1. На каком расстоянии от α находится точка K?

2. При каком R находятся на одной прямой центр шара, центр основания конуса и точка K?

3. Через точку K проводится плоскость β, параллельная α. Могут ли быть равны сечения шара и конуса плоскостью β при некотором R?

4. Пусть радиус шара удовлетворяет условию 3. Сколько подобных шаров можно расположить так, чтобы каждый из них имел единственную точку с плоскостью, конусом и касался двух соседних шаров?

11 КЛАСС

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ

1. Многогранники

Многогранник и его элементы. Два подхода к определению понятия «многогранники». Многогранная поверхность и развертка. Призма как частный случай цилиндра. Правильная призма. Параллелепипед. Пирамида как частный случай конуса. Правильная пирамида. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера. Многогранные углы. Правильные многогранники. Симметрия правильных многогранников, правильных призм и правильных пирамид. Полуправильные многогранники.

Основная цель — определить понятие многогранника как тела, ограниченного конечным числом многоугольников, а также дать равносильное этому определению конструктивное определение как телу, составленному из тетраэдров, рассмотреть наиболее важные частные случаи многогранников и их симметрии, доказать теорему Эйлера.

Чтобы конструктивно определить призмы и пирамиды, общего понятия многогранника не требуется. Оно понадобится для определений выпуклых многогранников, правильных многогранников и т. д.

При изучении многогранников большое внимание уделяется их симметрии.

2. Объемы тел

Объемы простых тел. Зависимость объема тела от площадей его сечений (представление объема интегралом). Объемы цилиндра (призмы), конуса (пирамиды), шара, тел вращения. Изменение объема при подобии.

Основная цель — определить понятие объема простого тела и вывести формулы для вычисления объемов важнейших тел.

Вопрос об объеме тела трудный, и точное его решение выходит за рамки элементарной геометрии. Поэтому в школьном учебнике «Геометрия, 11» для получения необходимых результатов используются и наглядно очевидные соображения. Сначала устанавливается, что объем прямого цилиндра с произвольным основанием равен произведению площади основания цилиндра на его высоту. Затем с помощью этого предложения доказывается, что объем равен интегралу от площади его поперечных сечений. Умея вычислять площади поперечных сечений важнейших тел, находим их объемы.

3. Поверхности и их площади

Основная цель — познакомить учеников с понятиями поверхности и геометрии на поверхности (т. е. с внутренней геометрией поверхности), дать определение площади выпуклой поверхности и вывести формулы для вычисления площадей сферы, цилиндра и конуса, познакомить учеников с элементами сферической геометрии.

Строгое решение вопроса об измерении площади поверхности выходит за рамки элементарной геометрии. Поэтому в учебнике «Геометрия, 11» в этой теме тоже опираются на наглядно очевидные положения. Трудность этого вопроса даже для выпуклых поверхностей иллюстрирует пример Шварца, приведенный в учебнике «Геометрия, 11». Измеряя площади выпуклых поверхностей, аппроксимируют их описанными вокруг них многогранниками, но для конусов и цилиндров можно рассмотреть и их развертки. В этой теме рассказывается и о таких вещах, которые лежат за рамками традиционной эвклидовой геометрии, например об односторонних и двусторонних поверхностях, о картографической проблеме.

4. Векторы и координаты

Понятие вектора. Сонаправленность и равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по базису. Векторный метод. Координаты вектора. Действия с векторами и действия с координатами. Скалярное умножение векторов. Векторное умножение векторов. Декартовы координаты в пространстве. Метод координат. Формула для расстояния между точками. Уравнение сферы. Уравнение плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.

Основная цель — познакомить выпускников средней школы с методом координат и векторным методом.

Идеи и методы современной геометрии в школьном курсе геометрии — это метод преобразований, метод координат и векторный метод. В курсе основной школы они уже рассматривались. Так что с идейной стороны изучение этих вопросов в курсе стереометрии ничего нового не дает.

Векторы и координаты по природе своей многомерны. В учебнике «Геометрия, 11» многие вопросы рассматриваются по аналогии с соответствующими планиметрическими вопросами. При этом происходит повторение темы «Векторы и координаты», изученной еще в основной школе, но на стереометрическом материале. Существенным расширением в этой теме является изучение векторного умножения векторов, нужного в курсе физики в классах с углубленным изучением физики.

5. Движения

Преобразования фигур. Движения и равенство фигур. Частные виды движений: параллельный перенос, центральная симметрия, зеркальная симметрия, поворот вокруг прямой, классификация движений. Общее понятие симметрии, группа симметрии.

Основная цель — дать теорию движений пространства: доказать общие свойства движений, изучить частные виды движений, доказать классификационные теоремы, рассмотреть симметрию фигур.

В этой теме движения становятся не методом исследований в геометрии, а предметом самостоятельного изучения. Важность этой темы для современного углубленного курса геометрии в том, что она аналогична исследованию функций в математическом анализе.

6. Заключение и итоговое повторение

Современная геометрия (геометрия на поверхности, геометрия Лобачевского, многомерные пространства). Основания геометрии. Геометрия и действительность.

Основная цель — дать представление выпускникам средней школы о геометрии как о живой, развивающейся науке, исследующей окружающий нас мир, а не как о застывшем мертвом предмете, а также подготовить выпускников к итоговой аттестации.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант: 2 ч в неделю, всего 68 ч
II вариант: 3 ч в неделю, всего 102 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава V. Многогранники		**15**	**22**
21	Многогранник и его элементы	2	3
22	Призмы	3	3
23	Пирамиды	5	5
24	Выпуклые многогранники	1	2
25	Теорема Эйлера	1	2
26	Правильные и полуправильные многогранники	2	3
	Решение задач	—	3
	Контрольная работа № 5 Контрольная работа № 5 (углубл.)	1 —	— 1

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава VI. Объемы		**10**	**12**
27	Определение площади и объема	1	1
28	Объем прямого цилиндра	1	2
29	Представление объема интегралом	1	1
30	Объемы некоторых тел	6	6
	Решение задач	—	1
	Контрольная работа № 6 Контрольная работа № 6 (углубл.)	1 —	— 1
Глава VII. Поверхности		**6**	**12**
31	Геометрия поверхности	—	2
32	Площадь поверхности	4	6
33	Сферическая геометрия	—	2
	Решение задач	1	1
	Контрольная работа № 7 Контрольная работа № 7 (углубл.)	1 —	— 1
Глава VIII. Векторы и координаты		**16**	**21**
34	Векторы	4	6
35	Разложение вектора на составляющие	2	3
37	Координаты	6	8
	Решение задач	3	3
	Контрольная работа № 8 Контрольная работа № 8 (углубл.)	1 —	— 1
Глава IX. Преобразования		**8**	**13**
38	Движения и их общие свойства	2	2

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
39	Частные виды движений пространства	4	4
40	Теоремы о задании движений в пространстве	—	2
41	Классификация движений	—	2
42	Симметрия	2	3
	Контрольная работа № 9 (углубл.)	—	1
Глава X. Современная геометрия и теория относительности		**2**	**2**
Итоговое повторение		**7**	**11**
Резерв		**4**	**9**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольные работы для I варианта планирования приведены на с. 68. Контрольные работы для II варианта планирования (углубл.) составлены на 2 часа. Учитель по своему усмотрению может сократить количество заданий в них или дополнить контрольные работы для I варианта планирования какими-либо заданиями из данных работ. Контрольная работа № 8′ проводится по усмотрению учителя при наличии времени. Другие варианты контрольных работ для II варианта планирования приведены в книге В. М. Паповского и др. «Углубленное изучение геометрии в 11 классе».

Контрольная работа № 5

Вариант 1

Каждое ребро куба, равное 1, разделили на три части. Точки деления являются вершинами многогранника M. Грани этого многогранника — правильные восьмиугольники или правильные треугольники.

1. Проверьте справедливость теоремы Эйлера для многогранника M.

2. Существует ли такая точка, которая равноудалена от всех:
а) вершин M; б) граней M; в) ребер M?

3. Вычислите:
а) диаметр M;
б) угол между двумя непараллельными и не имеющими общих точек треугольными гранями;
в) расстояние между какими-то скрещивающимися прямыми, на которых лежат ребра M, не лежащие в параллельных гранях куба.

4. В каких границах лежит площадь S сечения:
а) параллельного грани исходного куба;
б) перпендикулярного диагонали исходного куба?

Вариант 2

Каждое ребро куба, равное 1, разделили пополам. Точки деления являются вершинами многогранника M. Грани этого многогранника — правильные четырехугольники или правильные треугольники.

1. Проверьте справедливость теоремы Эйлера для многогранника M.

2. Существует ли такая точка, которая равноудалена от всех:
а) вершин M; б) граней M; в) ребер M?

3. Вычислите:
а) диаметр M;
б) угол между двумя непараллельными и не имеющими общих точек треугольными гранями;
в) расстояние между какими-то скрещивающимися прямыми, на которых лежат ребра M, не лежащие в параллельных гранях куба.

4. В каких границах лежит площадь S сечения:
а) параллельного грани исходного куба;
б) перпендикулярного диагонали исходного куба?

Контрольная работа № 6

Вариант 1

Дан шар радиуса 1.

1. Какую часть от его объема составляет наибольший объем вписанной в него правильной треугольной пирамиды?

2. В пирамиду, полученную в задаче 1, вписывается шар. Каково отношение объемов этого и исходного шаров?

3. В исходную сферу вписывается правильная треугольная пирамида, а в нее вписывается сфера. Какой из этих вписанных шаров имеет наибольший объем? Совпадает ли он с шаром из второго задания?

Вариант 2

Дан шар радиуса 1.

1. Какую часть от его объема составляет наибольший объем вписанной в него правильной четырехугольной пирамиды?

2. В пирамиду, полученную в задаче 1, вписывается шар. Каково отношение объемов этого и исходного шаров?

3. В исходную сферу вписывается правильная четырехугольная пирамида, а в нее вписывается сфера. Какой из этих вписанных шаров имеет наибольший объем? Совпадает ли он с шаром из второго задания?

Контрольная работа № 7

Вариант 1

В шаре с площадью поверхности S находится тело, составленное из цилиндра и конуса. Они имеют общее основание, граница которого лежит на сфере. Вершина конуса и окружность другого основания цилиндра лежат на данной сфере.

1. Пусть угол в осевом сечении конуса равен 60°. Чему равна площадь поверхности этого тела?

2. Пусть образующая конуса равна образующей цилиндра. Чему равна площадь поверхности этого тела?

3. Может ли площадь конической поверхности этого тела равняться площади цилиндрической поверхности этого тела?

4. Может ли площадь поверхности этого тела быть больше чем $0{,}5S$?

Вариант 2

В шаре с площадью поверхности S находится тело, составленное из цилиндра и двух конусов. Каждый конус имеет с цилиндром общее основание, граница которого лежит на сфере, а других общих точек они не имеют.

1. Пусть угол в осевом сечении конуса равен 90°. Чему равна площадь поверхности этого тела?

2. Пусть образующая конуса равна образующей цилиндра. Чему равна площадь поверхности этого тела?

3. Может ли площадь цилиндрической поверхности этого тела составлять половину от площади всей поверхности этого тела?

4. Может ли площадь поверхности этого тела быть больше чем $0{,}7S$?

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Множество M — это множество всех единичных векторов $\vec{x}$, таких, что $\vec{x}\vec{a} = 1$, где $\vec{a}$ — данный вектор. Найдутся ли в M такие 3 вектора, которые образуют базис?

2. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы базиса. Найдите вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}$, если:

а) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = |-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$;

б) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|$;

в) $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|$.

3. $x - y + z = 1$. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

4. $ABCD$ — тетраэдр.

а) Докажите, что $BC^2 + CA^2 + AB^2 \leqslant 4R^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2$, где R — радиус описанной сферы.

б) Когда достигается равенство?

Вариант 2

1. Множество M — это множество всех единичных векторов $\vec{x}$, таких, что $\vec{x}\vec{a} = -1$, где $\vec{a}$ — данный вектор. Найдутся ли в M такие 3 вектора, которые образуют базис?

2. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы базиса. Найдите вектор, перпендикулярный вектору $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = |-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$;

б) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}|$;

в) $|\vec{b} + \vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}|$.

3. $x + y - z = 1$. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

4. $ABCD$ — тетраэдр.
а) Докажите, что
$BC^2 + CD^2 + DB^2 \leqslant 4R^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2$, где R — радиус описанной сферы.
б) Когда достигается равенство?

Контрольная работа № 8′

Вариант 1

Даны точки A (7; 6; 6), B (3; 0; 0), C (1; 2; 0), D (1; 0; 2).
1. Найдите:
а) угол между прямыми AB и CD;
б) угол между плоскостями ABC и ABD;
в) угол между прямой AB и плоскостью BCD.

2. а) Является ли тетраэдр $ABCD$ правильной пирамидой?
б) Лежит ли начало координат в этом тетраэдре?

3. Найдите:
а) проекцию точки A на плоскость BCD;
б) объем этого тетраэдра;
в) центр тяжести;
г) радиус описанной сферы.

Вариант 2

Даны точки A (6; 7; 6), B (2; 1; 0), C (0; 3; 0), D (0; 1; 2).
1. Найдите:
а) угол между прямыми AB и CD;
б) угол между плоскостями ABC и ABD;
в) угол между прямой AB и плоскостью BCD.

2. а) Является ли тетраэдр $ABCD$ правильной пирамидой?
б) Лежит ли начало координат в этом тетраэдре?

3. Найдите:
а) проекцию точки A на плоскость BCD;
б) объем этого тетраэдра;
в) центр тяжести;
г) радиус описанной сферы.

Контрольная работа № 9

Вариант 1

1. Какие элементы симметрии имеет многогранник, составленный из двух равных треугольных призм, имеющих общую боковую грань?

2. Правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1 повернули на 90° вокруг отрезка, перпендикулярного скрещивающимся ребрам AB и CD.
а) Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного многогранников.
б) Вычислите их объем.

3. Плоскости α, β и γ попарно перпендикулярны. Каким движением является композиция трех зеркальных отражений относительно этих плоскостей?

Вариант 2

1. Какие элементы симметрии имеет многогранник, составленный из двух равных четырехугольных призм, имеющих общую боковую грань?

2. Правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1 повернули на 90° вокруг отрезка, перпендикулярного скрещивающимся ребрам BC и AD.
а) Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного многогранников.
б) Вычислите их объем.

3. Прямые a, b и c попарно перпендикулярны и имеют общую точку. Каким движением является композиция трех осевых симметрий относительно этих прямых?

ЛИТЕРАТУРА

1. Геометрия, 10—11: Учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — М.: Просвещение, 2006—2008.
2. Глазков Ю. А. Геометрия: рабочая тетрадь для 10 класса / Ю. А. Глазков, И. И. Юдина, В. Ф. Бутузов. — М.: Просвещение, 2003—2008.
3. Бутузов В. Ф. Геометрия: рабочая тетрадь для 11 класса / В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина. — М.: Просвещение, 2004—2008.
4. Зив Б. Г. Геометрия: дидактические материалы для 10 класса. — М.: Просвещение, 2007—2008.
5. Зив Б. Г. Геометрия: дидактические материалы для 11 класса. — М.: Просвещение, 2007—2008.
6. Саакян С. М. Изучение геометрии в 10—11 классах /С. М. Саакян, В. Ф. Бутузов. — М.: Просвещение, 2008.
7. Погорелов А. В. Геометрия, 10—11: Учеб. для. общеобразоват. учреждений. — М.: Просвещение, 2006—2008.
8. Веселовский С. Б. Геометрия: дидактические материалы по геометрии для 10 класса / С. Б. Веселовский, В. Д. Рябчинская. — М.: Просвещение, 2008.
9. Веселовский С. Б. Геометрия: дидактические материалы по геометрии для 11 класса / С. Б. Веселовский, В. Д. Рябчинская. — М.: Просвещение, 2004—2008.
10. Земляков А. Н. Геометрия в 10 классе: методические рекомендации. — М.: Просвещение, 2002.
11. Земляков А. Н. Геометрия в 11 классе: методические рекомендации. — М.: Просвещение, 2003.
12. Александров А. Д. Геометрия, 10—11: Учеб. для. общеобразоват. учреждений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2006.
13. Евстафьева Л. П. Геометрия: дидактические материалы для 10—11 класса. — М.: Просвещение, 2004.
14. Геометрия, 10—11: Кн. для учителя / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Л. П. Евстафьева. — М.: Просвещение, 2005.
15. Александров А. Д. Геометрия, 10: Учеб. для. углубл. изуч. математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2006—2008.
16. Александров А. Д. Геометрия, 11: Учеб. для. углубл. изуч. математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2006—2008.

17. Рыжик В. И. Геометрия: дидактические материалы для 10 класса с углубленным изучением математики. — М.: Просвещение, 2007.
18. Рыжик В. И. Геометрия: Дидактические материалы для 11 класса с углубленным изучением математики. — М.: Просвещение, 2008.
19. Паповский В. М. Углубленное изучение геометрии в 10 классе / В. М. Паповский, Н. М. Пульцин. — М.: Просвещение, 2001.
20. Паповский В. М. Углубленное изучение геометрии в 11 классе / В. М. Паповский, К. Н. Аксенов, М. Я. Пратусевич. — М.: Просвещение, 2002.
21. Геометрия: сб. задач для проведения экзамена в 9 и 11 кл. / [Д. И. Аверьянов, Л. И. Звавич, Б. П. Пигарев, А. Р. Рязановский]. — М.: Просвещение, 2005—2008.
22. Зив Б. Г. Задачи по геометрии для 7—11 классов / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский. — М.: Просвещение, 2003—2008.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ГЕОМЕТРИЯ

Программы общеобразовательных учреждений

10—11 классы

Составитель **Бурмистрова** Татьяна Антоновна

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *И. Е. Красильникова*
Художник *О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор и верстальщик *Н. В. Лукина*
Корректор *И. А. Смирнова*, *А. К. Райхчин*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 28.10.09. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,82. Тираж 10 000 экз. Заказ № 29187.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru